

Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε τις τιμές των $(-1)^{1/2}$, $i^{1/3}$, $(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^{1/4}$.
2. (i) Γράψτε τους τύπους των ολόμορφων κλάδων της τετραγωνικής ρίζας στο $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.
(ii) Γράψτε τους τύπους των ολόμορφων κλάδων της κυβικής ρίζας στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
3. (i) Γράψτε τον τύπο ενός ολόμορφου κλάδου της $(w+1)^{1/2}$ στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ και τον τύπο ενός ολόμορφου κλάδου της $(w-1)^{1/2}$ στο $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ολόμορφος κλάδος της $(w^2-1)^{1/2}$ στο $\Omega = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ και γράψτε τον τύπο του.
(ii) Ομοίως, γράψτε τον τύπο ενός ολόμορφου κλάδου της $(w+1)^{1/2}$ στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ και τον τύπο ενός ολόμορφου κλάδου της $(w-1)^{1/2}$ στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$. Αποδείξτε (πιο δύσκολα απ' ότι στο (i)) ότι υπάρχει ολόμορφος κλάδος της $(w^2-1)^{1/2}$ στο $\Omega' = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
(iii) Ποιά είναι η σχέση ανάμεσα σε δύο ολόμορφους κλάδους της $(w^2-1)^{1/2}$ στο ίδιο σύνολο, είτε στο Ω είτε στο Ω' ;
(iv) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ολόμορφος κλάδος της $(w^2-1)^{1/2}$ σε οποιονδήποτε κύκλο ο οποίος γυρνάει γύρω από ένα μόνο από τα σημεία ± 1 .
4. Έστω $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφες στο χωρίο Ω και έστω ότι οι f', g' είναι συνεχείς στο Ω .
(i) Αν $|f(z) - 1| < 1$ για κάθε $z \in \Omega$, αποδείξτε ότι $\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω .
(ii) Αν $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ για κάθε $z \in \Omega$, αποδείξτε ότι $\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω .
5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής στο \mathbb{R} και $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+|t|} dt < +\infty$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ποιός είναι ο τύπος της F' στο $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;
6. Βρείτε το σύνολο ολομορφίας της συνάρτησης $f(z) = \int_0^1 \frac{1}{1+tz} dt$. Ποιός είναι ο τύπος της f' στο σύνολο ολομορφίας της f ;