

Όγδοο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των συναρτήσεων $\frac{1}{z^2+5z+6}$, $\frac{1}{(z^2-1)^2}$, $e^z + e^{1/z}$, $\frac{\cos z-1}{z^4}$, $\frac{1}{\sin z}$, $\tan z$, $\frac{1}{\sin^2 z}$, $\frac{1}{e^z-1}$ στις μεμονωμένες ανωμαλίες τους στο \mathbb{C} .
2. Υπολογίστε τά $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^8} dx$.
3. Υπολογίστε τά πν $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1} dx$, πν $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{x(x^2+1)} dx$.
4. Υπολογίστε τό $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+1} dx$.
5. Υπολογίστε τό $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a \cos \theta + a^2} d\theta$ όταν $0 < a < 1$.
6. Υπολογίστε τό $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^4+1} dx$.
7. Έστω $r = \frac{p}{q}$ μία ρητή συνάρτηση με $\deg q \geq \deg p + 2$. Αν z_1, \dots, z_n είναι οι ρίζες του πολυωνύμου q , αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^n \text{Res}(r; z_k) = 0$.
Ποιά είναι η τιμή του $\sum_{k=1}^n \text{Res}(r; z_k)$ όταν $\deg q = \deg p + 1$;
8. (i) Έστω $A = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} D_{n\pi}(\frac{\pi}{4})$. Αποδείξτε ότι η $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ είναι φραγμένη στο A .
(ii) Θεωρήστε το τετραγωνικό χωρίο $R_n = [-(n + \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi] \times [-(n + \frac{1}{2})\pi, (n + \frac{1}{2})\pi]$ όταν $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\oint_{\partial R_n} \frac{\cot z}{z^2} dz \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow +\infty$.
(iii) Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
9. Έστω f ολόμορφη στο \mathbb{D} και συνεχής στο $\bar{\mathbb{D}}$ με $|f(z)| < 1$ για κάθε $z \in \mathbb{T}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(z) = z^n$ έχει ακριβώς n λύσεις στο \mathbb{D} .
10. Βρείτε τον αριθμό των ριζών της $z^4 - 6z + 3$ στον δακτύλιο $D_0(1, 2)$.
11. (i) Έστω $z_0 \in \mathbb{D}$ και η συνάρτηση $T(z) = \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$. Αποδείξτε ότι $T(z) \in \mathbb{D}$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$ και $T(z) \in \mathbb{T}$ για κάθε $z \in \mathbb{T}$.
(ii) Έστω $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ και η συνάρτηση $f(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}$. Αποδείξτε ότι $f(z) \in \mathbb{D}$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$ και $f(z) \in \mathbb{T}$ για κάθε $z \in \mathbb{T}$.
(iii) Βρείτε τον δείκτη στροφής ως προς το 0 της καμπύλης με παραμετρική εξίσωση $z = f(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$.
(iv) Αποδείξτε ότι για κάθε $w \in \mathbb{D}$ η εξίσωση $f(z) = w$ έχει ακριβώς n λύσεις στο \mathbb{D} .