Ένατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω (f_n) μια ακολουθία ολόμορφων συναρτήσεων στο χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ η οποία είναι τοπικά φραγμένη σε κάθε $z \in \Omega$. Αν κάθε f_n δεν μηδενίζεται πουθενά στο Ω και $f_n(z_0) \to 0$ για κάποιο $z_0 \in \Omega$, αποδείξτε ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.

2. Έστω f φραγμένη και ολόμορφη στο $\Omega = \{z = x + iy \,|\, a < x < b, y > 0\}$ και $-\infty < a < x_0 < b < +\infty$. Αν $f(x_0 + iy) \to A$ όταν $y \to +\infty$, αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $\sup_{x \in [a+\epsilon, b-\epsilon]} |f(x + iy) - A| \to 0$ όταν $y \to +\infty$.

3. Έστω $M \geq 0$, ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $\mathcal{F}$ η συλλογή όλων των ολόμορφων f στο Ω με $\iint_\Omega |f(x, y)|^2 \, dxdy \leq M$. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{F}$ είναι τοπικά φραγμένη σε κάθε $z \in \Omega$.

4. Έστω (f_n) ακολουθία ολόμορφων συναρτήσεων στο χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Αν κάθε f_n έχει το πολύ k ρίζες στο Ω, αποδείξτε ότι είτε η f έχει το πολύ k ρίζες στο Ω είτε η f είναι ταυτοτικά 0 στο Ω.

5. Έστω $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ολόμορφη στο $\mathbb{D}$. Αποδείξτε ότι:
   (i) $\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)} f(z_1)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2} z_1} \right|$ για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.
   (ii) $\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$.
   Αποδείξτε ότι, αν ισχύει ισότητα στο (i) για ένα τουλάχιστον ζευγάρι $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ με $z_1 \neq z_2$ ή στο (ii) για ένα τουλάχιστον $z \in \mathbb{D}$, τότε υπάρχουν $z_0 \in \mathbb{D}$ και λ με $|\lambda| = 1$ ώστε $f(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} \, z}$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$ και τότε ισχύουν τα (i) και (ii) ταυτοτικά ως ισότητες.

6. Έστω $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ολόμορφη στο $\mathbb{D}$ και ακολουθίες (z_n') και (z_n'') στο $\mathbb{D}$ ώστε $z_n' \to 1$ και $\left| \frac{z_n'' - z_n'}{1 - \overline{z_n'} z_n''} \right| \leq M < 1$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $z_n'' \to 1$. Επίσης, αν $f(z_n') \to i$, αποδείξτε ότι $f(z_n'') \to i$.

7. Βρείτε όλες τις ολόμορφες $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ με $f(0) = \frac{1}{2}$ και $f'(0) = \frac{3}{4}$.