Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω μ.χ. (X,d) και $A \subseteq B \subseteq X$. Αποδείξτε ότι $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ και $A^\circ \subseteq B^\circ$.

2. Έστω μ.χ. (X,d), (Y,ρ) και $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$ και συνεχής $f : A \to Y$.
(i) Αν τα A, B είναι ανοικτά, αποδείξτε ότι το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό.
(ii) Αν τα A, B είναι κλειστά, αποδείξτε ότι το $f^{-1}(B)$ είναι κλειστό.

3. Έστω μ.χ. (X,d) και $x_n \to x$ και $y_n \to y$ στον (X,d). Αποδείξτε ότι $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$ στο $\mathbb{R}$.

4. Έστω μ.χ. (X,d) και $A, B \subseteq X$. Αν τα A, B είναι συμπαγή, αποδείξτε ότι το $A \cup B$ είναι συμπαγές.

5. Έστω μ.χ. (X,d) και $x_0 \in X$ και συμπαγή $A, B \subseteq X$. Αποδείξτε ότι:
(i) υπάρχουν $x', y' \in A$ ώστε $d(x', y') = \operatorname{diam} A$, όπου $\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y) \,|\, x, y \in A\}$.
(ii) υπάρχει $x' \in A$ ώστε $d(x_0, x') = \inf\{d(x_0, x) \,|\, x \in A\}$.
(iii) υπάρχουν $x' \in A$ και $y' \in B$ ώστε $d(x', y') = \inf\{d(x,y) \,|\, x \in A, y \in B\}$.

6. Αν το $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι φραγμένο, αποδείξτε ότι τα $\overline{A}, \partial A$ είναι συμπαγή.

7. Βρείτε πολύ απλά παραδείγματα:
(i) συνεκτικών $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ ώστε το $A \cap B$ να μην είναι συνεκτικό.
(ii) συνεκτικού $A \subseteq \mathbb{R}^2$ του οποίου το ∂A δεν είναι συνεκτικό.
(iii) συνεκτικού $A \subseteq \mathbb{R}^2$ του οποίου το A° δεν είναι συνεκτικό.

8. Ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικά; Βρείτε τις συνεκτικές συνιστώσες τους.
(i) Το συμπλήρωμα ενός κύκλου.
(ii) Το συμπλήρωμα ενός ευθυγράμμου τμήματος.
(iii) $\{(\frac{1}{n}, 0) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
(iv) $\{(0,0)\} \cup \{(\frac{1}{n}, 0) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
(v) $[(0,0),(1,0)] \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} [(0, \frac{1}{n}), (1, \frac{1}{n})]$, όπου $[a,b]$ συμβολίζει το ευθ.τμήμα με άκρα τα σημεία a, b.
(vi) $\{(x,y) \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$.

9. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικά:
(i) $\{(x, \sin x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.
(ii) $\{(x, \sin \frac{1}{x}) \,|\, 0 < x \le 1\}$.
(iii) $\{(x, \sin \frac{1}{x}) \,|\, 0 < x \le 1\} \cup [(0,-1),(0,1)]$.

10. Έστω ανοικτό και συνεκτικό $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και έστω ότι κάθε σημείο του $B \subseteq A$ είναι μεμονωμένο σημείο του B. Αποδείξτε ότι το $A \setminus B$ είναι συνεκτικό.

11. Έστω μ.χ. (X,d) και $A \subseteq X$.
(i) Αν το A είναι κλειστό, αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχουν κλειστά B, C ώστε $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$.
(ii) Αν το A είναι ανοικτό, αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχουν ανοικτά B, C ώστε $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$.

12. Έστω μ.χ. (X,d).
(i) Έστω συμπαγή $A_n \subseteq X$ ώστε $A_{n+1} \subseteq A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ώστε για κάθε $x', y' \in A_n$ υπάρχουν διαδοχικά σημεία του A_n με πρώτο σημείο το x' και τελευταίο το y' με την απόσταση οποιωνδήποτε δύο διαδοχικών τέτοιων σημείων να είναι μικρότερη από $\frac{1}{n}$. Αποδείξτε ότι το $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ είναι συνεκτικό.
(ii) Έστω συμπαγές $A \subseteq X$ και έστω ότι τα $x, y \in A$ ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες του A. Αποδείξτε ότι υπάρχει διάσπαση (B, C) του A ώστε $x \in B$ και $y \in C$.