Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. (i) Ελέγξτε την παραγωγισιμότητα των συναρτήσεων $|z|$, $\operatorname{Re} z$ και $\operatorname{Im} z$ στα σημεία του $\mathbb{C}$.
(ii) Αποδείξτε ότι η
$$G(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y)=(0,0) \\ (x^2y)/(x^4+y^2), & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$
ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy - Riemann στο 0, ότι το $\frac{G(z)-G(0)}{z}$ έχει όριο όταν το z τείνει στο 0 πάνω σε οποιαδήποτε ευθεία που περιέχει το 0, αλλά ότι η G δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

2. Έστω ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Ορίζουμε $\Omega^* = \{z \,|\, \overline{z} \in \Omega\}$ και $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ με τύπο $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Αποδείξτε ότι το Ω^* είναι ανοικτό και ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο $z_0 \in \Omega$, τότε η f^* είναι παραγωγίσιμη στο $\overline{z_0} \in \Omega^*$.

3. Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και z_0 εσωτερικό σημείο του A. Έστω u, v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f και έστω ότι οι $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ υπάρχουν σε μια περιοχή του z_0 και είναι συνεχείς στο z_0.
(i) Αν το $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Re} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0.
(ii) Αν το $\lim_{z\to z_0} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, αποδείξτε ότι είτε η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 είτε η $\overline{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0.

4. Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη στο χωρίο (δηλαδή ανοικτό και συνεκτικό) Ω και έστω u, v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f.
(i) Αν είτε η u είτε η v είναι σταθερή στο Ω, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.
(ii) Πιο γενικά, αν υπάρχει ευθεία l έτσι ώστε να ισχύει $f(z) \in l$ για κάθε $z \in \Omega$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω. Τι συμβαίνει αν, αντί για ευθεία l, υποθέσουμε ότι υπάρχει κύκλος C ώστε να ισχύει $f(z) \in C$ για κάθε $z \in \Omega$;

5. Έστω ανοικτά σύνολα $U, V \subseteq \mathbb{C}$ και $f : V \to U$, $g : U \to \mathbb{C}$, $h : V \to \mathbb{C}$ έτσι ώστε η h να είναι ένα προς ένα και $h = g \circ f$. Αν η h είναι παραγωγίσιμη στο $w_0 \in V$, η g είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 = f(w_0)$ με $g'(z_0) \neq 0$ και η f είναι συνεχής στο w_0, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο w_0 και $f'(w_0) = \frac{h'(w_0)}{g'(z_0)}$.

6. (i) Αν το p είναι πολυώνυμο βαθμού n με ρίζες $z_1, \ldots, z_n$, αποδείξτε ότι
$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z-z_1} + \cdots + \frac{1}{z-z_n} \qquad \text{για κάθε } z \neq z_1, \ldots, z_n.$$
Κατόπιν αποδείξτε ότι, αν οι ρίζες του p περιέχονται σε ένα κλειστό ημιεπίπεδο, τότε οι ρίζες του p' περιέχονται στο ίδιο ημιεπίπεδο. Συμπεράνατε ότι οι ρίζες του p' περιέχονται στο μικρότερο κυρτό πολύγωνο το οποίο περιέχει τις ρίζες του p.
(ii) Για κάθε a και κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ αποδείξτε ότι η εξίσωση $1 + z + az^n = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $z \in \overline{D}_0(2)$.

7. Αποδείξτε ότι $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ για κάθε z.

8. Αποδείξτε ότι $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$ για κάθε z.

9. Έστω ότι το z τείνει στο ∞ κινούμενο πάνω σε μία ημιευθεία. Ανάλογα με την ημιευθεία, μελετήστε την ύπαρξη του $\lim e^z$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Ποιό χαρακτηριστικό της ημιευθείας καθορίζει την ύπαρξη και την τιμή του ορίου;

10. Βρείτε τις εικόνες μέσω της εκθετικής συνάρτησης των:

$$\{x+iy \,|\, a<x<b, \theta<y<\theta+\pi\}, \quad \{x+iy \,|\, a<x<b, \theta<y<\theta+2\pi\},$$
$$\{x+iy \,|\, x<b, \theta<y<\theta+\pi\}, \quad \{x+iy \,|\, x<b, \theta<y<\theta+2\pi\},$$
$$\{x+iy \,|\, a<x, \theta<y<\theta+\pi\}, \quad \{x+iy \,|\, a<x, \theta<y<\theta+2\pi\}.$$

11. Στο z-επίπεδο κάθε οριζόντια ευθεία είναι κάθετη σε κάθε κατακόρυφη ευθεία. Επίσης, στο w-επίπεδο κάθε ημιευθεία με κορυφή το 0 είναι κάθετη σε κάθε κύκλο με κέντρο το 0. Πώς αυτά σχετίζονται με την συμμορφία της συνάρτησης $w=e^z$;

12. Έχουμε ορίσει τις συναρτήσεις

$$\cos z=\tfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z=\tfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z=\tfrac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z=\tfrac{\cos z}{\sin z}.$$

(i) Αποδείξτε ότι αυτές οι συναρτήσεις όταν περιοριστούν στο $\mathbb{R}$ ταυτίζονται με τις γνωστές μας τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Βρείτε τα πεδία ορισμού τους και τις περιόδους τους. Αποδείξτε ότι
• $\sin^2 z+\cos^2 z=1$,
• $\sin(z+w)=\sin z\cos w+\cos z\sin w$ και $\cos(z+w)=\cos z\cos w-\sin z\sin w$,
• $|\cos(x+iy)|^2=\cos^2 x+\sinh^2 y$ και $|\sin(x+iy)|^2=\sin^2 x+\sinh^2 y$, όπου $\sinh y=(e^y-e^{-y})/2$.
(ii) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις είναι ολόμορφες στα πεδία ορισμού τους και βρείτε τις παραγώγους τους.
(iii) Μελετήστε την $\sin z$ στην κατακόρυφη ζώνη $\{x+iy \,|\, -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\}$ και την $\cos z$ στην κατακόρυφη ζώνη $\{x+iy \,|\, 0<x<\pi\}$. Δείτε πού απεικονίζονται οι διάφορες κατακόρυφες ευθείες και τα διάφορα οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα (μήκους π) που βρίσκονται σε αυτές τις δύο ζώνες από τις αντίστοιχες δύο συναρτήσεις.

13. Βρείτε τις αντίστροφες εικόνες μέσω της εκθετικής συνάρτησης $w=e^z$ των εξής συνόλων:

$$\{re^{i\theta} \,|\, 1<r<3, -\tfrac{\pi}{2}<\theta<\tfrac{\pi}{2}\}, \quad \{re^{i\theta} \,|\, 1<r, -\tfrac{\pi}{2}<\theta<\tfrac{\pi}{2}\},$$
$$\{re^{i\theta} \,|\, r<1, -\tfrac{\pi}{2}<\theta<\tfrac{\pi}{2}\}, \quad \{re^{i\theta} \,|\, 1<r<3, -\pi<\theta<\pi\},$$
$$\{re^{i\theta} \,|\, 1<r<3, 0<\theta<2\pi\}, \quad \{re^{i\theta} \,|\, 1<r<3, -\tfrac{\pi}{2}<\theta<\tfrac{3\pi}{2}\}.$$

Σε ποιά από αυτά τα σύνολα ορίζεται ο πρωτεύων κλάδος του log και ποιοί άλλοι συνεχείς κλάδοι του log ορίζονται σε αυτά; Ποιοί συνεχείς κλάδοι του log ορίζονται στα άλλα σύνολα; Σε κάθε περίπτωση γράψτε τύπους των συνεχών κλάδων του log καθώς και την εικόνα καθενός συνόλου μέσω των αντίστοιχων συνεχών κλάδων του log.

14. Αν το A είναι οποιοδήποτε από τα σύνολα

$$\{w \,|\, r_1\le|w|\le r_2\}\setminus[-r_2,-r_1], \quad \{w \,|\, 0<|w|\le r_2\}\setminus[-r_2,0),$$
$$\{w \,|\, r_1\le|w|<+\infty\}\setminus(-\infty,-r_1],$$

βρείτε το σύνολο $\mathrm{Log}(A)$.

15. Εργαστείτε στα παρακάτω στις περιπτώσεις: $\theta_0=-\pi$ και $\theta_0=0$.
Θεωρήστε το A_{θ_0}, δηλαδή το w-επίπεδο χωρίς την ημιευθεία με κορυφή το 0 η οποία σχηματίζει γωνία θ_0 με τον θετικό u-ημιάξονα. Θεωρήστε επίσης θ_1,θ_2 με $\theta_0<\theta_1<\theta_2<\theta_0+2\pi$ και r_1,r_2 με $0<r_1<r_2<+\infty$. Ζωγραφίστε το σύνολο

$$\{w=re^{i\theta} \,|\, r_1<r<r_2, \theta_1<\theta<\theta_2\}$$

και τις εικόνες του μέσω των διαφόρων συνεχών κλάδων του log στο A_{θ_0}.

16. Έστω $z \neq 0$. Αποδείξτε ότι το μοναδικό στοιχείο του $\exp(\log z)$ είναι το z καθώς και ότι τα στοιχεία του $\log(\exp z)$ είναι τα $z + k2\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

17. Έστω συνεκτικό $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Αν f_1 και f_2 είναι δύο (διαφορετικοί) συνεχείς κλάδοι του log στο A, αποδείξτε ότι $f_1(A) \cap f_2(A) = \emptyset$. (Παρατηρήστε πώς αυτό επιβεβαιώνεται στην περίπτωση $A = \mathbb{C} \setminus L$, όπου L είναι ημιευθεία με κορυφή το 0.)

18. Έστω $P = \{re^{i\theta} \,|\, 1 < r < 2, -\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}\}$, $Q = \{re^{i\theta} \,|\, 1 < r < 2, \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}\}$. Είναι δυνατόν να υπάρχουν συνεχής κλάδος f του log στο P και συνεχής κλάδος g του log στο Q οι οποίοι ταυτίζονται στο $P \cap Q$;

19. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$. Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο του αριθμού

$$\operatorname{Arg} \tfrac{z-b}{z-a} = \operatorname{Im}(\operatorname{Log} \tfrac{z-b}{z-a})$$

για κάθε z στο άνω ημιεπίπεδο $\mathbb{H}_+ = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$; Πώς μεταβάλλεται αυτός ο αριθμός όταν το z μεταβάλλεται στο $\mathbb{H}_+$;