Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Λύστε τις παρακάτω ασκήσεις από το τρίτο κεφάλαιο των σημειώσεών μου.
Ενότητα 3.1: 1, 2, 4, 5, 6.
Ενότητα 3.2: 1, 2, 3, 4.
Ενότητα 3.3: 1, 2.
Ενότητα 3.4: 1, 2.

Υποδείξεις/απαντήσεις.

3.1.1 Για το πρώτο όριο: Αν $z_0 \neq \pm 1, \infty$, το όριο είναι $\frac{z_0^3-1}{z_0^2-1}$. Αν $z_0 = 1$, το όριο είναι $\frac{3}{2}$. Αν $z_0 = -1$, το όριο είναι ∞. Αν $z_0 = \infty$, το όριο είναι ∞.

Για το δεύτερο όριο: Αν $z_0 \neq 1, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}, \infty$, το όριο είναι $\frac{z_0^2-1}{z_0^3-1}$. Αν $z_0 = 1$, το όριο είναι $\frac{2}{3}$. Αν $z_0 = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, το όριο είναι ∞. Αν $z_0 = \infty$, το όριο είναι 0.

3.1.2 Το πρώτο υπάρχει και είναι 0.

Για το δεύτερο δείτε τί γίνεται όταν το z τείνει στο ∞ πάνω σε κατακόρυφες ευθείες (π.χ. γράψτε $z = x + iy$ με σταθερό x και μεταβλητό y που τείνει στο $-\infty$ ή στο $+\infty$.).

Για τα άλλα δύο όρια δείτε τί γίνεται όταν το z τείνει στο 0 ή στο ∞ πάνω σε ημιευθείες με κορυφή το 0 (π.χ. γράψτε $z = re^{i\theta}$ με σταθερό θ και μεταβλητό r που τείνει στο 0 ή στο $+\infty$.)

3.1.4 Η ακολουθία $(\frac{i}{n})$ τείνει στο 0 και όλοι οι όροι της είναι $\neq 0$. Απάντηση: $w_0 = 0$.

3.1.5 Χρησιμοποιήστε τον κανόνα αλλαγής μεταβλητής.

Για την μία κατεύθυνση: $g = f \circ h$, όπου $h : D(0,1) \to D(0,1)$ με $h(z) = -iz$.

Για την άλλη κατεύθυνση: $f = g \circ h$, όπου $h : D(0,1) \to D(0,1)$ με $h(z) = iz$. (Προσέξτε τη διαφορά.)

3.1.6 Χρησιμοποιήστε τον κανόνα αλλαγής μεταβλητής.

Για την μία κατεύθυνση: $g = f \circ h$, όπου $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ με $h(z) = \frac{1}{z}$.

Για την άλλη κατεύθυνση: $f = g \circ h$, όπου $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ με $h(z) = \frac{1}{z}$.

3.2.1 Οι δύο πρώτες είναι συνεχείς.

Για την δεύτερη χρησιμοποιήστε την ανισότητα $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$.

Η τρίτη δεν είναι συνεχής: δείτε τί γίνεται όταν το z τείνει στο 0 πάνω σε ημιευθείες με κορυφή το 0.

3.2.2 Η πρώτη είναι συνεχής με πεδίο ορισμού $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Για τα όριά της δείτε την άσκηση 3.1.1.

Η δεύτερη είναι συνεχής με πεδίο ορισμού $\mathbb{C}$. Το όριο στο ∞ δεν υπάρχει (γιατί;).

Η τρίτη είναι συνεχής με πεδίο ορισμού $\mathbb{C} \setminus \{i2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. Το όριό της σε κάθε $i2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$ είναι ∞.

Η τέταρτη είναι συνεχής με πεδίο ορισμού $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Το όριό της στο ∞ είναι 1. Το όριό της στο 0 δεν υπάρχει (γιατί;).

3.2.3 Έστω ότι υπάρχει. Από την $f(1 - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n}$ προκύπτει $f(1) = 1$ (γιατί;) το οποίο είναι άτοπο λόγω της άλλης υπόθεσης.

3.3.1 Εφαρμόστε το Πόρισμα 3.1 (για ελάχιστη τιμή) με την $|f - w_0|$.

3.3.2 Εφαρμόστε το Πόρισμα 3.1 (για μέγιστη τιμή) με την $|f|$.

3.4.1 Έστω $D(w_0, r_0)$ ο δίσκος. Εφαρμόστε την Πρόταση 3.14 με την $|f - w_0|$, η οποία έχει μια τιμή $< r_0$ και μια τιμή $> r_0$.

3.4.2 Έστω $\operatorname{Re}(\overline{w}\, z) = c$ η εξίσωση της l. Εφαρμόστε την Πρόταση 3.14 με την $\operatorname{Re}(\overline{w}\, f)$, η οποία έχει μια τιμή $< c$ και μια τιμή $> c$.