Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων.

Λύστε τις παρακάτω ασκήσεις από το τρίτο και από το τέταρτο κεφάλαιο των σημειώσεών μου.
Ενότητα 3.5: 1, 2.
Ενότητα 3.6: 1, 2.
Ενότητα 4.1: 1, 2, 3.
Ενότητα 4.2: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Ενότητα 4.3: 1, 2, 3.

Υποδείξεις/απαντήσεις.

3.5.1 Αν θεωρήσετε $\Theta = \frac{\pi}{2}$, τότε ισχύει $f_k(-i) = -i\frac{\pi}{2}$ όταν $k = -1$, και ισχύει $f_k(1) = 4\pi$ όταν $k = 1$.

3.5.2 Αν θεωρήσετε $\Theta = -\frac{\pi}{2}$, τότε ισχύει $f_k(i) = i\frac{\pi}{2}$ όταν $k = 0$, και ισχύει $f_k(1) = 4\pi$ όταν $k = 2$.

3.6.1 Αν θεωρήσετε $\Theta = 0$, τότε ισχύει $g_k(-1) = i$ όταν $k = 0$, και ισχύει $g_k(i) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$ όταν $k = 1$.

3.6.2 Αν θεωρήσετε $\Theta = -\pi$, τότε ισχύει $g_k(1) = 1$ όταν $k = 0$, και ισχύει $g_k(i) = -i$ όταν $k = 2$.

4.1.1 $nzt^{n-1}e^{zt^n}$.

4.1.3 Για το συγκεκριμένο παράδειγμα το αριστερό μέλος της $\gamma'(\xi) = \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{b-a}$ είναι ίσο με $ie^{i\xi}$ και το δεξιό μέλος είναι ίσο με 0.

4.2.1 $z = \gamma(t) = (1-t)(1+i) + t(-2+3i)$, $t \in [0,1]$.
$z = \gamma(t) = \frac{3-t}{3}(1+i) + \frac{t}{3}(-2+3i)$, $t \in [0,3]$.
$z = \gamma(t) = \frac{4-t}{5}(1+i) + \frac{t+1}{5}(-2+3i)$, $t \in [-1,4]$.

4.2.2 $z = \gamma(t) = (1-t)2i + t(3-i)$, $t \in [0,1]$.
$z = \gamma(t) = t2i + (1-t)(3-i)$, $t \in [0,1]$.

4.2.3 $z = \gamma(t) = \begin{cases} (1-t)(-1) + t(1+i), & t \in [0,1] \\ (2-t)(1+i) + (t-1)(1-i), & t \in [1,2] \\ (3-t)(1-i) + (t-2)(-1), & t \in [2,3] \end{cases}$.

Η τροχιά είναι το τρίγωνο $\Delta(-1, 1+i, 1-i)$. Η φορά διαγραφής είναι από το -1 στο $1+i$, μετά από το $1+i$ στο $1-i$, και μετά από το $1-i$ πίσω στο -1. Η καμπύλη είναι κλειστή. Το μήκος της είναι ίσο με $2(1+\sqrt{5})$.

4.2.4 Η καμπύλη είναι κλειστή και η τροχιά της είναι ο κύκλος $C(z_0; r_0)$. Η φορά διαγραφής της είναι η θετική φορά περιστροφής γύρω από το z_0. Η καμπύλη διατρέχει n φορές την τροχιά της. Το μήκος της καμπύλης είναι ίσο με $n2\pi r_0$.

Αν $n < 0$, τα μόνα που αλλάζουν είναι ότι η φορά διαγραφής είναι η αρνητική φορά περιστροφής γύρω από το z_0, ότι η καμπύλη διατρέχει $|n|$ φορές την τροχιά της, και ότι το μήκος της είναι ίσο με $|n|2\pi r_0$.

4.2.5 Αποδείξτε ότι $(\gamma_2)'_+(s_0) = (\gamma_1)'_+(t_0)\sigma'(s_0)$ και $(\gamma_2)'_-(s_0) = (\gamma_1)'_-(t_0)\sigma'(s_0)$. Το αποτέλεσμα προκύπτει από αυτές τις δύο ισότητες.

4.2.6 Εφαρμόστε το Πόρισμα 3.1 (για ελάχιστη τιμή) με την $|\gamma - z_0|$.

4.3.1 $\frac{1-i2}{20}\big(e^{\frac{2+i4}{9}\pi^2} - 1\big)$, $\frac{3-i4}{12}$, $\frac{\pi}{2} - 1 + i\ln 2$, $\frac{1+i}{2}$.

4.3.2 Αν $n \neq 0$, η $\frac{1}{in}e^{int}$ είναι παράγουσα της e^{int}.

4.3.3

$$\int_a^b e^{xt}\cos(yt)\,dt = \frac{e^{xb}(x\cos(yb) + y\sin(yb)) - e^{xa}(x\cos(ya) + y\sin(ya))}{x^2+y^2},$$

$$\int_a^b e^{xt}\sin(yt)\,dt = \frac{e^{xb}(-y\cos(yb) + x\sin(yb)) - e^{xa}(-y\cos(ya) + x\sin(ya))}{x^2+y^2}.$$