Έβδομο φυλλάδιο ασκήσεων.

Λύστε τις παρακάτω ασκήσεις από το έβδομο κεφάλαιο των σημειώσεών μου.
Ενότητα 7.1: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8.
Ενότητα 7.2: 1, 4.
Ενότητα 7.3: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.
Ενότητα 7.4: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Ενότητα 7.5: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Ενότητα 7.6: 1, 2, 3.
Ενότητα 7.7: 1, 2, 3, 4, 6, 7.

Υποδείξεις/απαντήσεις.

7.1.1 Όχι, ναι, ναι, όχι, όχι, ναι.

7.1.2 Υπολογίστε τα μερικά αθροίσματα. Έχει άθροισμα ∞ ως μιγαδική σειρά, δεν έχει άθροισμα ως πραγματική σειρά.

7.1.3 Δ.ε., αποκλίνει, συγκλίνει απολύτως, συγκλίνει απολύτως, αποκλίνει, δ.ε., συγκλίνει απολύτως, δ.ε., συγκλίνει απολύτως. (Δ.ε. σημαίνει: δεν εφαρμόζεται).

7.1.4 Αποκλίνει, συγκλίνει απολύτως, δ.ε., συγκλίνει απολύτως, αποκλίνει, συγκλίνει απολύτως, συγκλίνει απολύτως.

7.1.7 (i) Χρησιμοποιήστε τις: $|x_n| \leq |z_n|$, $|y_n| \leq |z_n|$, $|z_n| \leq |x_n| + |y_n|$.

7.1.8 Εφαρμόστε κριτήριο ρίζας.

7.2.1 (i) $z + 1$.

(ii) Κλειστός δίσκος $\overline{D}_r$ κέντρου $\frac{r^2}{1-r^2}$ και ακτίνας $\frac{r}{1-r^2}$. Ο δίσκος $\overline{D}_r$ περιέχεται στο ημιεπίπεδο H. Για κάθε κλειστό δίσκο $\overline{D}$ που περιέχεται στο H υπάρχει r με $0 < r < 1$ ώστε ο δίσκος $\overline{D}$ να περιέχεται στον δίσκο $\overline{D}_r$. Για την ομοιόμορφη σύγκλιση χρησιμοποιήστε και την αλλαγή μεταβλητής $w = \frac{z}{z+1}$.

7.2.4 Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 7.6.

7.3.1 $D\big(0; \frac{1}{2}\big)$ και $\frac{1}{1-2z}$, $D(0;3)$ και $-\operatorname{Log}\big(1 + \frac{z}{3}\big)$, $D(0;+\infty)$ και e^{3z}.

7.3.2 Όλοι οι δίσκοι έχουν κέντρο το 0. Οι ακτίνες είναι: 1, 1, $\frac{1}{3}$, $+\infty$, 1, 0, e, 0, 4, 27.

7.3.3 $D(0;2,+\infty)$ και $\frac{2}{z-2}$, $D\big(0;\frac{1}{3},+\infty\big)$ και $\frac{1}{3z-1}$, $D(0;1,+\infty)$, $D(0;1,+\infty)$, $D(0;e,+\infty)$.

7.3.4 $D(0;1,2)$ και $\frac{i}{2}\,\frac{z^2+(1+i2)z+4}{z^2+(1-i2)z-i2}$.

7.3.5 (i) Διότι $a_n = \frac{2}{n}$ για άρτιο n, και $a_n = 0$ για περιττό n. Άρα ο τύπος με το $\lim_{n\to+\infty}\big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\big|$ δεν εφαρμόζεται, και το $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ δεν υπάρχει.

(ii) $w = z^2$. Η ακτίνα είναι 1. Το άθροισμα είναι $-\operatorname{Log}(1 - z^2)$.

7.3.6 (i) Στον $D(0;1)$: $\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)z^n$. Στον $D(0;1,+\infty)$ ισχύει $|z| > 1$, οπότε γράψτε $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ με $\big|\frac{1}{z}\big| < 1$, και χρησιμοποιήστε γεωμετρική σειρά. Θα βρείτε $\frac{1}{z-1} = \sum_{-\infty}^{n=-1} z^n$.

(ii) Αναλύστε το $\frac{1}{(z-3)(z-4)}$ σε απλά κλάσματα: $\frac{1}{(z-3)(z-4)} = \frac{1}{z-4} - \frac{1}{z-3}$. Για καθένα από τα $\frac{1}{z-4}$, $\frac{1}{z-3}$ εργαστείτε όπως με το $\frac{1}{z-1}$ στο (i). Θα βρείτε

$$\frac{1}{(z-3)(z-4)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}}\Big)z^n \quad \text{στο } D(0;3),$$

$$\frac{1}{(z-3)(z-4)} = \sum_{-\infty}^{n=-1}\Big(-\frac{1}{3^{n+1}}\Big)z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(-\frac{1}{4^{n+1}}\Big)z^n \quad \text{στο } D(0;3,4),$$

$$\frac{1}{(z-3)(z-4)} = \sum_{+\infty}^{n=-1}\Big(\frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\Big)z^n \quad \text{στο } D(0;4,+\infty).$$

7.3.8 (i) Αν $s(z)$ είναι το κοινό άθροισμα των δύο δυναμοσειρών στον $D(z_0;R')$, τότε $a_n' = \frac{s^{(n)}(z_0)}{n!}$ και $a_n'' = \frac{s^{(n)}(z_0)}{n!}$.

(ii) Κάντε αλλαγή μεταβλητής $w = \frac{1}{z-z_0}$, καταλήξτε σε δίσκους με κέντρο το 0, και χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του (i).

7.3.10 Η τρίτη σειρά είναι το άθροισμα των δύο πρώτων. Άρα αν συγκλίνουν οι δύο πρώτες τότε συγκλίνει και η τρίτη, και αν συγκλίνει μόνο η μία από τις δύο πρώτες τότε δεν συγκλίνει η τρίτη.

7.4.1 $-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$.

7.4.2 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n}$.

7.4.3 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}$ στον δίσκο $D(z_0;|z_0-1|)$.

7.4.4 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{z_0}(z-z_0)^n}{n!}$ στον δίσκο $D(z_0;+\infty)$.

7.4.5

$$\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\cos z_0}{(2k)!}(z-z_0)^{2k} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin z_0}{(2k-1)!}(z-z_0)^{2k-1} \quad \text{στο } D(z_0;+\infty),$$

$\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \sin z_0}{(2k)!}(z-z_0)^{2k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\cos z_0}{(2k-1)!}(z-z_0)^{2k-1}$ στο $D(z_0; +\infty)$.

7.4.6 $\cosh z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ και $\sinh z = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!}$ στο $D(0; +\infty)$.

7.4.7 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2z^{2k-1}}{9^k}$ στο $D(0; 3)$.

7.5.1 1, 2, 3, 1, 3, 5, 0, 2, 4, 1, 2, 1.

7.5.2 Παραγοντοποιήστε: $f(z) = (z-z_0)f_1(z)$, $g(z) = (z-z_0)g_1(z)$, όπου $f_1(z_0) = f'(z_0)$, $g_1(z_0) = g'(z_0)$.

7.5.3 Μόνο η $f(z) = 1 + z^2$.

7.5.4 Δεν υπάρχει.

7.5.5 Δεν υπάρχει.

7.5.6 Θεωρήστε την παράγωγο της $\frac{f}{g}$. Ισχύει $f(z) = cg(z)$ για κάθε $z \in \Omega$, όπου c είναι μη-μηδενική σταθερά.

7.6.1 $\frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{1!z^2} + \frac{1}{2!z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+3)!}$ στο $D(0; 0, +\infty)$.

$\frac{e^z-1}{z^5} = \frac{1}{1!z^4} + \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{4!z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+5)!}$ στο $D(0; 0, +\infty)$.

$\frac{\sin z}{z^5} = \frac{1}{1!z^4} - \frac{1}{3!z^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+5)!}$ στο $D(0; 0, +\infty)$.

$\frac{\sin z - z}{z^5} = -\frac{1}{3!z^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+5)!}$ στο $D(0; 0, +\infty)$.

$\frac{\mathrm{Log}(1-z)+z}{z^3} = -\frac{1}{2z} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n+3}$ στο $D(0; 0, 1)$. Δεν υπάρχει σειρά Laurent στο $D(0; 1, +\infty)$.

$z(e^{\frac{1}{z}} - e^{-\frac{1}{z}}) = \sum_{-\infty}^{k=-1} \frac{2z^{2k}}{(1-2k)!} + 1$ στο $D(0; 0, +\infty)$.

$\sin \frac{1}{z} = \sum_{-\infty}^{k=-1}(-1)^{k-1} \frac{z^{2k+1}}{(-2k-1)!}$ στο $D(0; 0, +\infty)$.

7.6.2 Όπως στην άσκηση 7.3.6.

7.6.3 $\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} + \cdots$ στο $D(0; 0, \pi)$.

$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \cdots$ στο $D(0; 0, \pi)$.

$\frac{z}{(\sin z)^2} = \frac{1}{z} + \frac{z}{3} + \cdots$ στο $D(0; 0, \pi)$.

$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{z}{12} + \cdots$ στο $D(0; 0, 2\pi)$.

7.7.1 Όχι, διότι δεν υπάρχει $R > 0$ ώστε η συνάρτηση να είναι αναλυτική στο $D(0; R) \setminus \{0\}$.

7.7.2 Η σειρά Laurent της $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ στο $D(0; 0, +\infty)$ είναι $1 - \frac{z^2}{3!} + \cdots$. Άρα το 0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f. Ορίζουμε $f(0) = 1$ και η f είναι αναλυτική στο $D(0; +\infty)$.

Η σειρά Laurent της $f(z) = \frac{\sin z - z}{z^3}$ στο $D(0; 0, +\infty)$ είναι $-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \cdots$. Άρα το 0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f. Ορίζουμε $f(0) = -\frac{1}{3!}$ και η f είναι αναλυτική στο $D(0; +\infty)$.

Η σειρά Laurent της $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ στο $D(0; 0, 2\pi)$ είναι $1 - \frac{z}{2} + \cdots$ (δείτε την άσκηση 7.6.3). Άρα το 0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f. Ορίζουμε $f(0) = 1$ και η f είναι αναλυτική στον δίσκο $D(0; 2\pi)$, αλλά και στο χωρίο $\mathbb{C} \setminus \{i2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$. Εναλλακτικά, έχουμε ότι $e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = zg(z)$, όπου η $g(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \cdots$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ με $g(0) = 1$. Άρα $f(z) = \frac{1}{g(z)}$, οπότε $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(0)} = 1$. Από Κριτήριο Riemann έχουμε ότι το 0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f.

Η σειρά Laurent της $f(z) = z \cot z$ στο $D(0; 0, \pi)$ είναι $1 - \frac{z^2}{3} + \cdots$ (δείτε την άσκηση 7.6.3). Άρα το 0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f. Ορίζουμε $f(0) = 1$ και η f είναι αναλυτική στον δίσκο $D(0; \pi)$, αλλά και στο χωρίο $\mathbb{C} \setminus \{ik\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$. Εναλλακτικά, έχουμε ότι $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots = zg(z)$, όπου η $g(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \cdots$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ με $g(0) = 1$. Άρα $f(z) = \frac{\cos z}{g(z)}$, οπότε $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{g(z)} = \frac{\cos 0}{g(0)} = 1$. Από Κριτήριο Riemann έχουμε ότι το 0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f.

Η σειρά Laurent της $f(z) = \frac{\mathrm{Log}(1-z)}{z}$ στο $D(0; 0, 1)$ είναι $-1 - \frac{z}{2} + \cdots$. Άρα το 0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f. Ορίζουμε $f(0) = -1$ και η f είναι αναλυτική στον δίσκο $D(0; 1)$, αλλά και στο χωρίο $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$.

7.7.3 Για την $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$ τα σημεία 1 και -1 είναι πόλοι τάξης 1.

Για την $\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}$ τα σημεία 1 και -1 είναι πόλοι τάξης 2.
Για την $\frac{e^z-1}{z}$ το σημείο 0 είναι αιρόμενη ανωμαλία.
Για την $\frac{e^z-1}{z^3}$ το σημείο 0 είναι πόλος τάξης 2.
Για την $\frac{z^2}{\sin z}$ το σημείο 0 είναι αιρόμενη ανωμαλία, και τα σημεία $k\pi$, με $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, είναι πόλοι τάξης 1.
Για την $\frac{1}{\cos z}$ τα σημεία $\frac{\pi}{2} + k\pi$, με $k \in \mathbb{Z}$, είναι πόλοι τάξης 1.
Για την $\frac{1}{(\sin z)^2}$ τα σημεία $k\pi$, με $k \in \mathbb{Z}$, είναι πόλοι τάξης 2.
Για την $e^z + e^{\frac{1}{z}}$ το σημείο 0 είναι ουσιώδης ανωμαλία.
Για την $\frac{1}{e^z-1}$ τα σημεία $i2k\pi$, με $k \in \mathbb{Z}$, είναι πόλοι τάξης 1.

7.7.6 Αν από το Ω αφαιρέσουμε τις μεμονωμένες ανωμαλίες της f, τότε το σύνολο Ω' που απομένει είναι χωρίο (γιατί;). Η f είναι αναλυτική στο Ω'. Αν το σύνολο των ριζών της f στο Ω, και άρα στο Ω', έχει σημείο συσσώρευσης στο Ω το οποίο δεν είναι ουσιώδης ανωμαλία της f, τότε αυτό το σημείο συσσώρευσης είναι στο Ω' (γιατί;). Άρα η f είναι σταθερή 0 στο Ω'. Άρα (γιατί;) η f δεν έχει μεμονωμένες ανωμαλίες στο Ω, και $\Omega' = \Omega$.

7.7.7 Αν η $\frac{1}{f-w}$ είναι φραγμένη στο $D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$, τότε το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της $\frac{1}{f-w}$. Άρα το $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)-w_0}$ υπάρχει και είναι αριθμός. Αν το $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)-w_0}$ είναι αριθμός $\neq 0$, τότε το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ είναι αριθμός, οπότε το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f. Αν $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)-w_0} = 0$, τότε $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, οπότε το z_0 είναι πόλος της f.