Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2016-17.

Ενδέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω χώροι Banach X και Y.

   (i) Αν U είναι το σύνολο όλων των φραγμένων ένα-προς-ένα τελεστών από τον X επί του Y, αποδείξτε ότι το U είναι ανοικτό υποσύνολο του $L(X, Y)$.

   Υπόδειξη: Αν ο $T \in L(X, Y)$ είναι ένα-προς-ένα και επί του Y, τότε $T^{-1} \in L(Y, X)$. Αποδείξτε ότι αν $S \in L(X, Y)$ και $\|S - T\| < 1/\|T^{-1}\|$, τότε ο S είναι ένα προς ένα και επί του Y.

   (ii) Αν W είναι το σύνολο όλων των φραγμένων τελεστών από τον X επί του Y, αποδείξτε ότι το W είναι ανοικτό υποσύνολο του $L(X, Y)$.

2. Έστω οποιοδήποτε συμπαγές $K \subseteq F$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $T \in l^2$ ώστε $\sigma(T) = K$.

   Υπόδειξη: Πάρτε $T(x_1, x_2, \ldots) = (\kappa_1 x_1, \kappa_2 x_2, \ldots)$ για κατάλληλο $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots) \in l^\infty$.

3. Θεωρήστε τον τελεστή αριστερής μετάθεσης $S_l : l^2 \to l^2$ με τύπο $S_l(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$ για κάθε $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l^2$. Αποδείξτε ότι $P_\sigma(S_l) = \{\lambda \,|\, |\lambda| < 1\}$, $R_\sigma(S_l) = \emptyset$, $C_\sigma(S_l) = \{\lambda \,|\, |\lambda| = 1\}$ και $\sigma(S_l) = \{\lambda \,|\, |\lambda| \leq 1\}$.

4. Έστω χώρος Banach X και $S, T \in L(X)$.

   (i) Αν $\lambda \in F \setminus \{0\}$, αποδείξτε ότι $\lambda \in \sigma(ST)$ αν και μόνον αν $\lambda \in \sigma(TS)$.

   Υπόδειξη: Αν $\lambda \neq 0$ και $(\lambda I - ST)^{-1} \in L(X)$, αποδείξτε ότι $(\lambda I - TS)^{-1} = \lambda^{-1} + \lambda^{-1} T(\lambda I - ST)^{-1} S$.

   (ii) Θεωρήστε τους τελεστές μετάθεσης $S_r, S_l : l^2 \to l^2$ και διερευνήστε την θέση του 0 στο $\sigma(S_r S_l)$ και στο $\sigma(S_l S_r)$.

5. (i) Έστω χώρος Banach X επί του $\mathbb{C}$ και $T \in L(X)$. Αν το $p(\lambda)$ είναι οποιοδήποτε πολυώνυμο, αποδείξτε ότι $p(\sigma(T)) = \sigma(p(T))$.

   Υπόδειξη: Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο γράφεται: $p(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$.

   (ii) Ισχύει το προηγούμενο αν $X = \mathbb{R}^2$, $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ και ο T είναι η στροφή κατά $\pi/2$;

6. Έστω χώρος Banach X επί του $\mathbb{C}$ και $S, T \in L(X)$ με $ST = TS$. Αποδείξτε ότι $r_\sigma(S+T) \leq r_\sigma(S) + r_\sigma(T)$ και $r_\sigma(ST) \leq r_\sigma(S) r_\sigma(T)$.

7. Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$.

   (i) Αν το ανοικτό $U \subseteq F$ περιέχει το $\sigma(T)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $\sigma(S) \subseteq U$ για κάθε $S \in L(X)$ με $\|S - T\| < \epsilon$.

   Υπόδειξη: Η $R(\lambda, T)$ είναι φραγμένη στο $F \setminus U$ και $\lambda I - S = (\lambda I - T)(I + R(\lambda, T)(T - S))$.

   (ii) Αν $T_n \to T$ στον $L(X)$, αποδείξτε ότι $\limsup r_\sigma(T_n) \leq r_\sigma(T)$.

8. Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$. Αν $T' \in L(X^*)$ είναι ο δυικός τελεστής του T, αποδείξτε ότι $R_\sigma(T) \subseteq P_\sigma(T')$ και $P_\sigma(T) \subseteq P_\sigma(T') \cup R_\sigma(T')$.

9. Έστω χώρος Banach X και $T \in L(X)$. Αποδείξτε ότι, αν το λ είναι συνοριακό σημείο του $\sigma(T)$, τότε $R(\lambda I - T) \neq X$.

10. Έστω χώροι με νόρμα X, Y και $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. Αποδείξτε ότι ο $R(T)$ είναι διαχωρίσιμος.

11. Έστω χώροι με νόρμα X, Y και $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. Αν ο $R(T)$ είναι πλήρης, αποδείξτε ότι $\dim(R(T)) < +\infty$.

    Υπόδειξη: Αν $B_n = \{x \in X \,|\, \|x\| \leq n\}$, αποδείξτε ότι $R(T) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{cl}(T(B_n))$.

12. Έστω χώροι Banach X_1, X_2 και χώρος με νόρμα Y. Αν $T_1 \in \mathcal{K}(X_1, Y)$, $T_2 \in L(X_2, Y)$ και $R(T_2) \subseteq R(T_1)$, αποδείξτε ότι $T_2 \in \mathcal{K}(X_2, Y)$.

    Υπόδειξη: Αν ο T_1 είναι ένα-προς-ένα, αποδείξτε ότι ο $T_1^{-1}T_2 : X_2 \to X_1$ είναι κλειστός και άρα φραγμένος. Αν ο T_1 δεν είναι ένα-προς-ένα, θεωρήστε τον χώρο-πηλίκο $X_1/N(T_1)$.

13. Έστω $1 < p < +\infty$ και $\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} = K < +\infty$. Αποδείξτε ότι ορίζεται τελεστής $T : l^p \to l^p$ με τύπο $(Tx)_i = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij}x_j$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots$ και κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p$. Αποδείξτε ότι ο T είναι συμπαγής και ότι $\|T\| \leq K$.

14. Έστω χώρος με νόρμα X και χώρος Hilbert Y. Αν $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ αποδείξτε ότι υπάρχουν $T_n \in L(X, Y)$ με $\dim(R(T_n)) < +\infty$ για κάθε n ώστε $\|T_n - T\| \to 0$.

    Υπόδειξη: Βάσει της άσκησης 10, ο $R(T)$ είναι διαχωρίσιμος. Θεωρήστε μία ορθοκανονική βάση $\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ του $R(T)$, τους υπόχωρους $Y_n = \langle\{e_1, \ldots, e_n\}\rangle$, τις προβολές P_n επί των Y_n και τους $T_n = P_nT$.