**Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2016-17.**

**Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.**

Παραδώστε τις ασκήσεις 1, 2, 3, 4 και 5 μέχρι το μάθημα της Παρασκευής 3/3.

1. Έστω χώρος $X$ με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$. Για οποιαδήποτε $x_1, \ldots, x_n \in X$ θεωρήστε τον $n \times n$ πίνακα Gram $\big[(x_i|x_j)\big]$ και την ορίζουσα Gram
$$G(x_1, \ldots, x_n) = \det\big[(x_i|x_j)\big].$$
[α] Χρησιμοποιώντας το ότι κάθε αντισυμμετρικός πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος, αποδείξτε ότι $G(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ και ότι $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ αν και μόνο αν το $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικώς εξηρτημένο.
[β] Αν $x \in X$, $M = \langle\{x_1, \ldots, x_n\}\rangle$ και το $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, αποδείξτε ότι
$$\min_{y \in M} \|x - y\|^2 = \frac{G(x, x_1, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)}.$$
Αποδείξτε με δεύτερο τρόπο το [α] χρησιμοποιώντας επαγωγή.
[γ] Αν το $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, αποδείξτε ότι ο όγκος του παραλληλεπίπεδου $P = \{t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \,|\, 0 \leq t_1 \leq 1, \ldots, 0 \leq t_n \leq 1\}$ είναι ίσος με $\sqrt{G(x_1, \ldots, x_n)}$.

2. Αποδείξτε ότι, αν $1 \leq p \leq +\infty$ και $p \neq 2$, ο $l^p$ με την $p$-νόρμα δεν είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αποδείξτε το ίδιο για τον $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ με την $p$-νόρμα, εκτός από ελάχιστες εξαιρέσεις τις οποίες πρέπει να προσδιορίσετε.

3. Θεωρούμε τον υπόχωρο $c_{00}$ του $l^2$ με στοιχεία όλες τις τελικά μηδενικές ακολουθίες.
[α] Αποδείξτε ότι το $K = \{y \in c_{00} \,|\, \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j}\, y_j = 1\}$ είναι κλειστό και κυρτό αλλά ότι δεν υπάρχει $y_0 \in K$ με $\|y_0\|_2 = \inf_{y \in K} \|y\|_2$.
[β] Αν $Y = \{y \in c_{00} \,|\, \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j}\, y_j = 0\}$, αποδείξτε ότι ο $Y$ είναι κλειστός υπόχωρος του $c_{00}$, αλλά $Y \neq (Y^{\perp})^{\perp}$.

4. Θεωρήστε το στοιχείο $z = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\, e_k = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ του $l^2$. Αποδείξτε ότι στον κλειστό υπόχωρο $Y = \langle\{z, e_2, e_3, \ldots\}\rangle$ του $l^2$ το $\{e_2, e_3, \ldots\}$ είναι maximal ορθοκανονικό σύνολο αλλά όχι ορθοκανονική βάση.

5. Έστω ότι για κάθε $i \in I$ ο $X_i$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)_i$ και επαγώμενη νόρμα $\|\cdot\|_i$. Θεωρήστε $\bigoplus_{i \in I} X_i$ να είναι το σύνολο όλων των $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ με την ιδιότητα:
$$\sum_{i \in I} \|x_i\|_i^2 < +\infty.$$
Επίσης, για $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$ στο $\bigoplus_{i \in I} X_i$ ορίσατε
$$(x|y) = \sum_{i \in I} (x_i|y_i)_i.$$
[α] Αποδείξτε ότι το $\bigoplus_{i \in I} X_i$ είναι γραμμικός χώρος, ότι η σειρά που ορίζει το $(x|y)$ συγκλίνει (στο $F$) και ότι το $(\cdot|\cdot)$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $\bigoplus_{i \in I} X_i$. Ο χώρος $\bigoplus_{i \in I} X_i$ με το συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται **ευθύ άθροισμα** των χώρων με εσωτερικό γινόμενο $X_i$, $i \in I$. Αποδείξτε ότι, αν κάθε $X_i$ είναι πλήρης, τότε και ο $\bigoplus_{i \in I} X_i$ είναι πλήρης.

[β] Έστω $X_i = F$ για κάθε $i \in I$. Θεωρήστε τον $l^2(I) = \bigoplus_{i\in I} F$. Δηλαδή, για κάθε $x = (x_i)_{i\in I}, y = (y_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} F$ έχουμε

$$(x|y) = \sum_{i\in I} x_i \overline{y_i}, \qquad \|x\|^2 = \sum_{i\in I} |x_i|^2.$$

Αποδείξτε ότι ο $l^2(I)$ είναι χώρος Hilbert.

[γ] Έστω χώρος Hilbert $X$ με ορθοκανονική βάση $\{x_i \,|\, i \in I\}$. Αποδείξτε ότι ο $X$ είναι ισομετρικός με τον $l^2(I)$.

6. Αποδείξτε ότι κάθε δύο maximal ορθοκανονικά σύνολα ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο έχουν τον ίδιο πληθάριθμο. Αν $X$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $A$ είναι οποιοδήποτε maximal ορθοκανονικό σύνολο του $X$, ο πληθάριθμος $\mathrm{card}(A)$ ονομάζεται **διάσταση Hilbert** του $X$.

7. Θεωρήστε τον χώρο $H^2(\mathbb{D})$ ο οποίος ορίσθηκε στην άσκηση 13 του δεύτερου φυλλαδίου. Κάθε $f \in H^2(\mathbb{D})$ γράφεται $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$, όπου η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{D}$.

[α] Αποδείξτε ότι για κάθε $r \in [0,1)$ ισχύει

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,d\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

[β] Αποδείξτε ότι το $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,d\theta$ είναι αύξουσα συνάρτηση του $r$ και ότι

$$\|f\|_2 = \lim_{r\to 1-}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,d\theta\Big)^{1/2}.$$

[γ] Αν η $f$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}$ και $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$, αποδείξτε ότι $f \in H^2(\mathbb{D})$ αν και μόνον αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$ και ότι, σ' αυτήν την περίπτωση,

$$\|f\|_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2.$$

[δ] Αποδείξτε ότι για κάθε $f, g \in H^2(\mathbb{D})$ με $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ και $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$, η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \overline{b_n}$ συγκλίνει και ότι, αν ορίσουμε

$$(f|g) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \overline{b_n},$$

τότε το $(\cdot|\cdot)$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $H^2(\mathbb{D})$ το οποίο επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|_2$.

8. Έστω διαχωρίσιμος χώρος $X$ με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot|\cdot)$, επαγώμενη νόρμα $\|\cdot\|$ και έστω ορθοκανονική βάση $\{x_1, x_2, \ldots\}$ του $X$. Επίσης, έστω χώρος μέτρου $(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Αν $f : \Omega \to X$, λέμε ότι η $f$ είναι **μετρήσιμη** (ως συνάρτηση με τιμές σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο) αν για κάθε $x \in X$ η συνάρτηση

$$(f(\cdot)|x) : \Omega \to F$$

είναι μετρήσιμη.

[α] Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες Parseval, αποδείξτε ότι, αν οι $f, g : \Omega \to X$ είναι μετρήσιμες, τότε οι συναρτήσεις

$$\|f(\cdot)\| : \Omega \to \mathbb{R}_0^+, \qquad (f(\cdot)|g(\cdot)) : \Omega \to F$$

είναι μετρήσιμες.
[β] Θεωρήστε τον χώρο $L^2(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ ως το σύνολο όλων των μετρήσιμων $f : \Omega \to X$ με

$$\int_\Omega \|f(a)\|^2 \, d\mu(a) < +\infty.$$

Αποδείξτε ότι ο $L^2(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ είναι γραμμικός χώρος.
[γ] Αποδείξτε ότι για κάθε $f, g \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ το

$$[f|g] = \int_\Omega (f(a)|g(a)) \, d\mu(a)$$

συγκλίνει και ότι το $[\cdot|\cdot]$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\Omega, \Sigma, \mu; X)$.
[δ] Για κάθε $f, g \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu; X)$ αποδείξτε ότι

$$[f|g] = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_\Omega (f(a)|x_k) \, \overline{(g(a)|x_k)} \, d\mu(a).$$

9. Έστω $\mu_1$ και $\mu_2$ δύο μέτρα στον ίδιο μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \Sigma)$, τα οποία είναι αμοιβαία ιδιάζοντα: $\mu_1 \perp \mu_2$. Αποδείξτε ότι

$$L^2(\Omega, \Sigma, \mu_1 + \mu_2) \overset{iso}{=} L^2(\Omega, \Sigma, \mu_1) \oplus L^2(\Omega, \Sigma, \mu_2).$$

Δείτε την άσκηση 5 για τον ορισμό του $X_1 \oplus X_2$.