Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. (i) Αποδείξτε ότι, αν $1 \leq p \leq +\infty$ και $p \neq 2$, τότε ο l^p με την p-νόρμα δεν είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο.
(*Υπόδειξη*. Αποδείξτε ότι η p-νόρμα δεν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου.)
(ii) Αποδείξτε το ίδιο για τον $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ με την p-νόρμα, εκτός από ελάχιστες εξαιρέσεις τις οποίες πρέπει να προσδιορίσετε.

2. Θεωρούμε τον υπόχωρο c_{00} του l^2 με στοιχεία όλες τις τελικά μηδενικές ακολουθίες.
(i) Αποδείξτε ότι το $K = \{y \in c_{00} \mid \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j}\, y_j = 1\}$ είναι κλειστό και κυρτό στον c_{00}, αλλά ότι δεν υπάρχει $y_0 \in K$ ώστε $\|y_0\|_2 = \inf_{y \in K} \|y\|_2$.
(ii) Αν $Y = \{y \in c_{00} \mid \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j}\, y_j = 0\}$, αποδείξτε ότι ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του c_{00}, αλλά $Y \neq (Y^\perp)^\perp$.

3. Θεωρήστε το στοιχείο $z = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\, e_k = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ του l^2. Αποδείξτε ότι στον υπόχωρο $Y = \mathrm{span}(\{z, e_2, e_3, \ldots\})$ του l^2 το $\{e_2, e_3, \ldots\}$ είναι maximal ορθοκανονικό σύνολο αλλά όχι ορθοκανονική βάση. Είναι ο Y κλειστός υπόχωρος του l^2;

4. Έστω ότι για κάθε $i \in I$ ο X_i είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ και νόρμα $\| \cdot \|_i$. Θεωρήστε $\bigoplus_{i \in I} X_i$ να είναι το σύνολο όλων των $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ με την ιδιότητα:
$$\sum_{i \in I} \|x_i\|_i^2 < +\infty.$$
Επίσης, για $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$ στο $\bigoplus_{i \in I} X_i$ ορίσατε
$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle_i.$$
(i) Αποδείξτε ότι το $\bigoplus_{i \in I} X_i$ είναι γραμμικός χώρος, ότι η σειρά που ορίζει το $\langle x, y \rangle$ συγκλίνει (στο F) και ότι το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $\bigoplus_{i \in I} X_i$. Ο χώρος $\bigoplus_{i \in I} X_i$ με το συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται **ευθύ άθροισμα** των χώρων με εσωτερικό γινόμενο X_i, $i \in I$. Αποδείξτε ότι, αν κάθε X_i είναι πλήρης, τότε και ο $\bigoplus_{i \in I} X_i$ είναι πλήρης.
(ii) Έστω $X_i = F$ για κάθε $i \in I$. Θεωρήστε τον $l^2(I) = \bigoplus_{i \in I} F$. Δηλαδή, για κάθε $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} F$ έχουμε
$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} x_i\, \overline{y_i}, \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |x_i|^2.$$
Αποδείξτε ότι ο $l^2(I)$ είναι χώρος Hilbert.
(iii) Έστω χώρος Hilbert X με ορθοκανονική βάση $\{x_i \mid i \in I\}$. Αποδείξτε ότι ο X είναι ισομετρικός με τον $l^2(I)$.
(iv) Αποδείξτε ότι κάθε δύο maximal ορθοκανονικά σύνολα ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο έχουν τον ίδιο πληθάριθμο. Αν X είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και A είναι οποιοδήποτε maximal ορθοκανονικό σύνολο του X, ο πληθάριθμος $\mathrm{card}(A)$ ονομάζεται **διάσταση Hilbert** του X.
(v) Έστω χώροι Hilbert X, Y. Αποδείξτε ότι οι X, Y είναι ισομετρικοί αν και μόνο αν έχουν την ίδια διάσταση Hilbert.

5. Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Για οποιαδήποτε $x_1, \ldots, x_n \in X$ θεωρήστε τον $n \times n$ **πίνακα Gram** $\big[\langle x_i, x_j \rangle\big]$ και την **ορίζουσα Gram**
$$G(x_1, \ldots, x_n) = \det \big[\langle x_i, x_j \rangle\big].$$

(i) Θεωρήστε γνωστό από την Γραμμική Άλγεβρα ότι κάθε $n \times n$ πραγματικός πίνακας $[a_{ij}]$ με $[a_{ji}] = [a_{ij}]$ είναι διαγωνιοποιήσιμος, καθώς και ότι κάθε $n \times n$ μιγαδικός πίνακας $[a_{ij}]$ με $[a_{ji}] = [\overline{a_{ij}}]$ είναι διαγωνιοποιήσιμος.
Αποδείξτε ότι $G(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$, καθώς και ότι $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ αν και μόνο αν το $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.
(ii) Αν $x \in X$, $M = \text{span}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ και το $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, αποδείξτε ότι

$$\min_{y \in M} \|x - y\|^2 = \frac{G(x, x_1, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Αποδείξτε με δεύτερο τρόπο το (i) χρησιμοποιώντας επαγωγή.
(iii) Αν το $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, αποδείξτε ότι ο όγκος του παραλληλεπίπεδου $P = \{t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n \,|\, 0 \leq t_1 \leq 1, \ldots, 0 \leq t_n \leq 1\}$ είναι ίσος με $\sqrt{G(x_1, \ldots, x_n)}$.

6. Θεωρήστε τον χώρο $H^2(\mathbb{D})$ ο οποίος ορίσθηκε στην άσκηση 10 του δεύτερου φυλλαδίου. Είναι γνωστό από την Μιγαδική Ανάλυση ότι κάθε $f \in H^2(\mathbb{D})$ (και, γενικότερα, κάθε f ολόμορφη στο $\mathbb{D}$) γράφεται $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$, όπου η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα στην f σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{D}$.
(i) Αποδείξτε ότι για κάθε $r \in [0, 1)$ ισχύει

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

(ii) Αποδείξτε ότι το $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta$ είναι αύξουσα συνάρτηση του r στο $[0, 1)$ και ότι

$$\|f\|_2 = \lim_{r \to 1-} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \right)^{1/2}.$$

(iii) Αν η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{D}$ και $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$, αποδείξτε ότι $f \in H^2(\mathbb{D})$ αν και μόνον αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$ και ότι, σ' αυτήν την περίπτωση,

$$\|f\|_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2.$$

(iv) Αποδείξτε ότι για κάθε $f, g \in H^2(\mathbb{D})$ με $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ και $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$, η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \overline{b_n}$ συγκλίνει και ότι, αν ορίσουμε

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \overline{b_n},$$

τότε το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $H^2(\mathbb{D})$ το οποίο επάγει τη νόρμα $\| \cdot \|_2$.

7. Έστω χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και νόρμα $\| \cdot \|$, και έστω αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2, \ldots\}$ του X. Επίσης, έστω χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ).
Αν $f : \Omega \to X$, λέμε ότι η f είναι **μετρήσιμη** (ως συνάρτηση με τιμές σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο) αν για κάθε $x \in X$ η συνάρτηση

$$\langle f(\cdot), x \rangle : \Omega \to F$$

είναι μετρήσιμη.
(i) Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες Parseval, αποδείξτε ότι, αν οι $f, g : \Omega \to X$ είναι μετρήσιμες, τότε οι συναρτήσεις

$$\|f(\cdot)\| : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \langle f(\cdot), g(\cdot) \rangle : \Omega \to F$$

είναι μετρήσιμες.
(ii) Θεωρήστε τον χώρο $L^2(\Omega,\Sigma,\mu;X)$ ως το σύνολο όλων των μετρήσιμων $f:\Omega\to X$ με

$$\int_\Omega \|f(a)\|^2\,d\mu(a)<+\infty.$$

Αποδείξτε ότι ο $L^2(\Omega,\Sigma,\mu;X)$ είναι γραμμικός χώρος.
(iii) Αποδείξτε ότι για κάθε $f,g\in L^2(\Omega,\Sigma,\mu;X)$ το

$$[f,g]=\int_\Omega \langle f(a),g(a)\rangle\,d\mu(a)$$

συγκλίνει και ότι το $[\cdot,\cdot]$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\Omega,\Sigma,\mu;X)$.
(iv) Για κάθε $f,g\in L^2(\Omega,\Sigma,\mu;X)$ αποδείξτε ότι

$$[f,g]=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_\Omega \langle f(a),e_k\rangle\,\overline{\langle g(a),e_k\rangle}\,d\mu(a).$$

8. Έστω μ_1 και μ_2 δύο μέτρα στον ίδιο μετρήσιμο χώρο (Ω,Σ), τα οποία είναι αμοιβαία ιδιάζοντα: $\mu_1\perp\mu_2$. Αποδείξτε ότι

$$L^2(\Omega,\Sigma,\mu_1+\mu_2)\overset{iso}{=}L^2(\Omega,\Sigma,\mu_1)\oplus L^2(\Omega,\Sigma,\mu_2),$$

δηλαδή ότι οι $L^2(\Omega,\Sigma,\mu_1+\mu_2)$, $L^2(\Omega,\Sigma,\mu_1)\oplus L^2(\Omega,\Sigma,\mu_2)$ είναι ισομετρικοί.
Δείτε την άσκηση 4 για τον ορισμό του $X_1\oplus X_2$.

9. Θεωρήστε γνωστό το εξής πόρισμα του θεωρήματος των Stone και Weierstrass: *το σύνολο των εκθετικών πολυωνύμων* $\sum_{k=-n}^{n}a_ke^{2\pi ikt}$*,* $n=0,1,2\ldots$*, είναι πυκνό στον* $C([0,1])$ *με την ομοιόμορφη νόρμα.*
Αποδείξτε ότι το σύνολο των συναρτήσεων

$$e_n(t)=e^{2\pi int},\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2([0,1])$.

10. Θεωρήστε γνωστό το θεώρημα του Weierstrass: *για κάθε κλειστό φραγμένο διάστημα* $[a,b]$ *το σύνολο των πολυωνύμων είναι πυκνό στον* $C([a,b])$ *με την ομοιόμορφη νόρμα.*
(i) Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$P_n(t)=\frac{(2n+1)^{1/2}}{2^{n+1/2}n!}\,\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n,\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Αποδείξτε ότι κάθε P_n είναι πολυώνυμο βαθμού n και ότι το σύνολο των P_n αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2([-1,1])$. Οι συναρτήσεις P_n ονομάζονται **πολυώνυμα Legendre**.
(ii) Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$H_n(t)=(-1)^ne^{t^2}\,\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}),\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Αποδείξτε ότι κάθε H_n είναι πολυώνυμο βαθμού n. Οι συναρτήσεις H_n ονομάζονται **πολυώνυμα Hermite**. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$\psi_n(t)=\frac{1}{\pi^{1/4}2^{n/2}(n!)^{1/2}}\,H_n(t)e^{-\frac12t^2},\quad n=0,1,2,\ldots,$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{R})$.
(iii) Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$L_n(t)=e^t\,\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t}),\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Αποδείξτε ότι κάθε L_n είναι πολυώνυμο βαθμού n. Οι συναρτήσεις L_n ονομάζονται **πολυώνυμα Laguerre**. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$\phi_n(t) = \frac{1}{n!}\, L_n(t) e^{-\frac{1}{2}\, t}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του $L^2([0, +\infty))$.