Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2019-20.

Πέμπτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω χώρος Banach X και ασθενώς$*$ συμπαγές $K \subseteq X'$. Αποδείξτε ότι η ασθενώς$*$ κλειστή κυρτή θήκη του K (δηλαδή το μικρότερο ασθενώς$*$ κλειστό και κυρτό σύνολο το οποίο περιέχει το K) είναι ασθενώς$*$ συμπαγής.

2. (i) Έστω γραμμικός χώρος X άπειρης διάστασης και $\mathcal{L}$ μία διαχωρίζουσα συλλογή γραμμικών συναρτησοειδών του X. Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτή περιοχή του 0 ως προς την τοπολογία $\sigma(X, \mathcal{L})$ περιέχει έναν υπόχωρο του X άπειρης διάστασης.
(ii) Έστω χώρος με νόρμα X. Αποδείξτε ότι η ασθενής τοπολογία $\sigma(X, X')$ του X ταυτίζεται με την ισχυρή τοπολογία του αν και μόνο αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση.
Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το (i).

3. Έστω αυτοπαθής χώρος X με νόρμα και Z ένας γραμμικός υπόχωρος του X'. Αποδείξτε ότι ο Z αποτελεί διαχωρίζουσα συλλογή γραμμικών συναρτησοειδών του X αν και μόνο αν είναι πυκνός στον X'.

4. Στον l^2, για κάθε m, n με $1 \leq m < n$ θεωρούμε το στοιχείο $e_{m,n} = e_m + m e_n$ και το $A = \{e_{m,n} \,|\, 1 \leq m < n\}$. Αποδείξτε ότι το 0 ανήκει στην κλειστότητα του A ως προς την ασθενή τοπολογία και ότι δεν υπάρχει ακολουθία στο A η οποία συγκλίνει ασθενώς στο 0.

5. Έστω χώρος άπειρης διάστασης X με νόρμα. Αποδείξτε ότι η κλειστότητα ως προς την ασθενή τοπολογία $\sigma(X, X')$ του $\{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ είναι το $\{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$.

6. (i) Έστω γραμμικός χώρος X και γραμμικά συναρτησοειδή $l, l_1, \ldots, l_n : X \to F$. Αν $l(x) = 0$ για κάθε $x \in X$ με $l_1(x) = \ldots = l_n(x) = 0$, αποδείξτε ότι υπάρχουν $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in F$ ώστε $l = \kappa_1 l_1 + \cdots + \kappa_n l_n$.
Υπόδειξη. Αποδείξτε ότι το $W = \{(l_1(x), \ldots, l_n(x), l(x)) \,|\, x \in X\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του F^{n+1} ο οποίος δεν περιέχει κανένα στοιχείο του F^{n+1} της μορφής $(0, \ldots, 0, \lambda)$ με $\lambda \neq 0$. Συμπεράνατε ότι υπάρχει στοιχείο του F^{n+1} της μορφής $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 1)$ το οποίο είναι ορθογώνιο στον W.
(ii) Έστω γραμμικός χώρος X, μία διαχωρίζουσα συλλογή γραμμικών συναρτησοειδών $\mathcal{L}$ του X, και ένα γραμμικό συναρτησοειδές $l : X \to F$. Αποδείξτε ότι το l είναι συνεχές στον X ως προς την ασθενή τοπολογία $\sigma(X, \mathcal{L})$ αν και μόνο αν το l ανήκει στην γραμμική θήκη span$(\mathcal{L})$ της $\mathcal{L}$. Κατόπιν, αποδείξτε ότι $\sigma(X, \text{span}(\mathcal{L})) = \sigma(X, \mathcal{L})$.
Υπόδειξη. Δείτε τι σημαίνει η συνέχεια του l στο 0 για $\epsilon = 1$ και εφαρμόστε το αποτέλεσμα του (i).
(iii) Έστω μη-πλήρης χώρος με νόρμα X και έστω $\overline{X}$ μία πλήρωσή του. Αποδείξτε ότι οι X', $(\overline{X})'$ είναι ισομετρικά ισομορφικοί, αλλά ότι δεν υπάρχει ομοιομορφισμός ανάμεσα στον X' με την ασθενή$*$ τοπολογία $\sigma(X', X)$ και στον $(\overline{X})'$ με την ασθενή$*$ τοπολογία $\sigma((\overline{X})', \overline{X})$.
Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το (ii).

7. Έστω διαχωρίσιμος χώρος X με νόρμα.
(i) Αποδείξτε ότι η ασθενής$*$ τοπολογία στην κλειστή μοναδιαία μπάλα $\overline{B}'$ με κέντρο 0 του X' είναι μετρικοποιήσιμη. Δηλαδή ότι υπάρχει μετρική d στην $\overline{B}'$ ώστε η τοπολογία η οποία επάγεται στην $\overline{B}'$ από την d να ταυτίζεται με την ασθενή$*$ τοπολογία στην $\overline{B}'$.
Υπόδειξη. Θεωρήστε πυκνό υποσύνολο $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ του X έτσι ώστε $x_n \neq 0$ για κάθε n, και την συνάρτηση

$$d(x', y') = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x'(x_n) - y'(x_n)|}{2^n \|x_n\|}, \quad x', y' \in \overline{B}'.$$

(ii) Αποδείξτε ότι κάθε ασθενώς$*$ συμπαγές $K \subseteq X'$ είναι ακολουθιακά ασθενώς$*$ συμπαγές (δηλαδή για κάθε ακολουθία στο K υπάρχει ασθενώς$*$ συγκλίνουσα υποακολουθία της σε στοιχείο του K).

8. Έστω αυτοπαθής χώρος X με νόρμα. Αποδείξτε ότι κάθε ασθενώς$*$ συμπαγές $K \subseteq X'$ είναι ακολουθιακά ασθενώς$*$ συμπαγές.

9. Έστω χώρος X με νόρμα. Αποδείξτε ότι υπάρχει συμπαγής, Hausdorff τοπολογικός χώρος K και ισομετρική εμφύτευση $T : X \to C(K)$.
   Υπόδειξη. Θεωρήστε την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\overline{B}'$ με κέντρο 0 του X'. Από το θεώρημα του Alaoglou η $\overline{B}'$ είναι συμπαγής, Hausdorff τοπολογικός χώρος με την τοπολογία $\sigma(X', X)$ περιορισμένη στην $\overline{B}'$. Για κάθε $x \in X$ θεωρήστε την συνάρτηση $T(x) : \overline{B}' \to F$ με τύπο $T(x)(x') = x'(x)$. Δηλαδή, το $T(x)$ είναι το $J(x)$ περιορισμένο στην $\overline{B}'$.

10. Κυρτός συνδυασμός κάποιων στοιχείων $a_1, \ldots, a_m$ ενός γραμμικού χώρου είναι ένα άθροισμα της μορφής $t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m$, όπου $t_1, \ldots, t_m \geq 0$ και $t_1 + \cdots + t_m = 1$.
    Έστω χώρος με νόρμα X και $x_n \overset{w}{\to} x$ στον X. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (y_n) στον X κάθε όρος της οποίας είναι κυρτός συνδυασμός όρων της (x_n) ώστε $y_n \to x$.
    Υπόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των όρων της (x_n) και αποδείξτε ότι το σύνολο αυτό είναι κυρτό.

11. Έστω χώρος X με νόρμα. Αποδείξτε ότι ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν κάθε κλειστός υπόχωρος του X' είναι ασθενώς$*$ κλειστός.
    Υπόδειξη. Αν ο X είναι αυτοπαθής, τότε η ασθενής και η ασθενής$*$ τοπολογία του X' ταυτίζονται. Για το αντίστροφο, πάρτε μη-μηδενικό $x'' \in X''$ και θεωρήστε το $\{x' \in X' \,|\, x''(x') = 1\}$. Αποδείξτε ότι αυτό είναι ασθενώς$*$ κλειστό στον X' και πάρτε ανοικτή περιοχή του 0 ως προς την $\sigma(X', X)$ η οποία να είναι ξένη προς το σύνολο αυτό. Εφαρμόστε το (i) της άσκησης 6.