Συναρτησιακή Ανάλυση, εαρινό εξάμηνο 2020-21.

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|$. Αποδείξτε ότι:
   (i) $\mathrm{cl}(\{x \in X \mid \|x-a\| < r\}) = \{x \in X \mid \|x-a\| \le r\}$,
   (ii) $\mathrm{bd}(\{x \in X \mid \|x-a\| < r\}) = \{x \in X \mid \|x-a\| = r\}$.
   Με $\mathrm{cl}(A)$ και $\mathrm{bd}(A)$ συμβολίζουμε την κλειστότητα και το σύνορο του $A \subseteq X$.

2. Έστω γραμμικός χώρος X και μετρική d στον X η οποία είναι αναλλοίωτη από μεταφορές και θετικά ομογενής:

   $$d(x+x_1, x+x_2) = d(x_1, x_2), \quad d(\kappa x_1, \kappa x_2) = |\kappa| d(x_1, x_2)$$

   για κάθε $x, x_1, x_2 \in X$, $\kappa \in F$.
   Βρείτε νόρμα στον X από την οποία να επάγεται η μετρική d.

3. Έστω χώρος X με νόρμα και $A, B \subseteq X$.
   (i) Αν το A είναι ανοικτό, αποδείξτε ότι το $A+B$ είναι ανοικτό.
   (ii) Αν τα A, B είναι συμπαγή, αποδείξτε ότι το $A+B$ είναι συμπαγές.
   (iii) Αν το A είναι κλειστό και το B συμπαγές, αποδείξτε ότι το $A+B$ είναι κλειστό.
   Θεωρήστε $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x_1, 0) \,|\, x_1 \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 x_2 = 1\}$.
   Τα $A, B \subseteq X$ είναι κλειστά. Βρείτε το $A+B$. Είναι το $A+B$ κλειστό;

4. Έστω χώρος X με νόρμα και Z κλειστός υπόχωρος του X. Αν ο Z και ο X/Z είναι πλήρεις, αποδείξτε ότι ο X είναι πλήρης.

5. Έστω χώρος X με νόρμα, Y κλειστός υπόχωρος του X και Z υπόχωρος του X με $\dim(Z) < +\infty$. Αποδείξτε ότι ο $Y+Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

6. Έστω χώρος X με νόρμα, Y υπόχωρος του X, Z κλειστός υπόχωρος του X με $\mathrm{codim}(Z) < +\infty$. Αποδείξτε ότι ο $Y+Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.
   Με $\mathrm{codim}(Z)$ συμβολίζουμε την διάσταση του X/Z.