Ασκήσεις στην Αρμονική Ανάλυση.

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$.

   (i) Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|\tau_{t'} f - \tau_{t''} f\|_1 < \epsilon$ όταν $|t' - t''| < \delta$. Διαμερίζουμε το $[0,1]$ σε μικρά διαδοχικά διαστήματα $I_1, \ldots, I_n$ μήκους $< \delta$ και επιλέγουμε $t_k \in I_k$ για $k = 1, \ldots, n$. Παρατηρήστε ότι

   $$f * g(x) = \textstyle\sum_{k=1}^n (\int_{I_k} g(t)\, dt)\, \tau_{t_k} f(x) + \sum_{k=1}^n \int_{I_k} (\tau_t f(x) - \tau_{t_k} f(x)) g(t)\, dt$$

   και άρα

   $$\left\| f * g - \textstyle\sum_{k=1}^n c_k \tau_{t_k} f \right\|_1 \leqslant \epsilon \|g\|_1$$

   όπου $c_k = \int_{I_k} g(t)\, dt$ για $k = 1, \ldots, n$.

   (ii) Συμπεράνατε ότι η $f * g$ είναι όριο στον $L^1(\mathbb{R}^n)$ (πεπερασμένων) γραμμικών συνδυασμών μεταφορών της f.

2. Γνωρίζουμε ότι ο $L^1(\mathbb{T})$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach. Λέμε ότι το $I \subseteq L^1(\mathbb{T})$ είναι ιδεώδες στην άλγεβρα $L^1(\mathbb{T})$ αν

   (a) $\lambda f + \mu g \in I$ για κάθε $f, g \in I$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

   (b) $f * g \in I$ για κάθε $f \in I$ και $g \in L^1(\mathbb{T})$.

   Το (a) από μόνο του σημαίνει ότι το I είναι γραμμικός υπόχωρος του $L^1(\mathbb{T})$.

   (i) Αν το I είναι ιδεώδες του $L^1(\mathbb{T})$, αποδείξτε ότι και η κλειστότητα $\mathrm{cl}\, I$ είναι ιδεώδες του $L^1(\mathbb{T})$.

   (ii) Αποδείξτε ότι τομή ιδεωδών του $L^1(\mathbb{T})$ είναι ιδεώδες του $L^1(\mathbb{T})$ και, κατόπιν, με βάση το (i) αποδείξτε ότι για κάθε $A \subseteq L^1(\mathbb{T})$ υπάρχει ελάχιστο κλειστό ιδεώδες του $L^1(\mathbb{T})$, ας το συμβολίσουμε $[A]$, το οποίο περιέχει το A.

   (iii) Αποδείξτε ότι $f * (\tau_y F_n) = (\tau_y f) * F_n \to \tau_y f$ στον $L^1(\mathbb{T})$ και συμπεράνατε ότι το $[\{f\}]$ περιέχει όλες τις μεταφορές της f και κατόπιν ότι ο κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $L^1(\mathbb{T})$ ο οποίος παράγεται από τις μεταφορές της f περιέχεται στο $[\{f\}]$, δηλαδή:

   $$\mathrm{cl}\left\{ \textstyle\sum_{k=1}^m \lambda_k \tau_{y_k} f \,\middle|\, m \in \mathbb{N}, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \right\} \subseteq [\{f\}]. \qquad (1)$$

   (iv) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 1 για να συμπεράνετε ότι το αριστερό μέρος της (1) είναι κλειστό ιδεώδες του $L^1(\mathbb{T})$ και, επομένως, ότι ισχύει ο αντίστροφος εγκλεισμός στην (1) και, επομένως, ότι

   $$\mathrm{cl}\left\{ \textstyle\sum_{k=1}^m \lambda_k \tau_{y_k} f \,\middle|\, m \in \mathbb{N}, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} \right\} = [\{f\}].$$

   (v) Έστω $A \subseteq L^1(\mathbb{T})$. Λέμε ότι το A είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές αν για κάθε $f \in A$ και κάθε $y \in \mathbb{R}$ ισχύει $\tau_y f \in A$. Αποδείξτε ότι ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος V του $L^1(\mathbb{T})$ είναι κλειστό ιδεώδες του $L^1(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν ο V είναι αναλλοίωτος ως προς μεταφορές.

3. (i) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(k) \neq 0$ για κάθε k. Αν $n \in \mathbb{N}$ βρείτε εκθετικό πολυώνυμο g_n ώστε να ισχύει $\widehat{g_n}(k) = \frac{1}{\widehat{f}(k)}$ για $|k| \leqslant n$. Παρατηρήστε ότι $\widehat{F_n}(k)\widehat{g_n}(k)\widehat{f}(k) = \widehat{F_n}(k)$ για κάθε k και άρα

   $$F_n * g_n * f = F_n.$$

   Τέλος, για κάθε $h \in L^1(\mathbb{T})$ ισχύει

   $$(h * F_n * g_n) * f = h * F_n \to h \qquad \text{στον } L^1(\mathbb{T})$$

και γνωρίζουμε από την άσκηση 1 ότι η $(h * F_n * g_n) * f$ είναι στην κλειστότητα των γραμμικών συνδυασμών των μεταφορών της f στον $L^1(\mathbb{T})$.

(ii) Αποδείξτε το **Θεώρημα του Wiener**: Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και ισχύει $\widehat{f}(k) \neq 0$ για κάθε k, τότε οι γραμμικοί συνδυασμοί των μεταφορών της f είναι πυκνοί στον $L^1(\mathbb{T})$.

4. (i) Έστω $k \in \mathbb{Z}$ και
$$M_k = \{f \in L^1(\mathbb{T}) \mid \widehat{f}(k) = 0\}.$$
Αποδείξτε ότι το M_k είναι μέγιστο γνήσιο κλειστό ιδεώδες του $L^1(\mathbb{T})$, δηλαδή ότι το M_k είναι κλειστό ιδεώδες του $L^1(\mathbb{T})$, ότι $M_k \neq L^1(\mathbb{T})$ και ότι, αν το I είναι κλειστό ιδεώδες του $L^1(\mathbb{T})$ με $M_k \subseteq I$, τότε είτε $I = M_k$ είτε $I = L^1(\mathbb{T})$.

(ii) Έστω I ένα γνήσιο κλειστό ιδεώδες του $L^1(\mathbb{T})$ και έστω ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ υπάρχει $g_k \in I$ με $\widehat{g_k}(k) \neq 0$. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $|k| \leqslant n$ θεωρούμε $h_k = g_k * \overline{\widetilde{g_k}}$ οπότε ισχύει $\widehat{h_k} \geqslant 0$ στο $\mathbb{Z}$ και $\widehat{h_k}(k) > 0$. Θεωρούμε την $f_n = \sum_{k=-n}^{n} h_k$ και τότε $f_n \in I$ και $\widehat{f_n}(k) \neq 0$ για $|k| \leqslant n$. Συνεχίστε όπως στο (i) της άσκησης 3, με την f_n στη θέση της f, και αποδείξτε ότι κάθε $h \in L^1(\mathbb{T})$ ανήκει στο I, καταλήγοντας έτσι σε άτοπο.

Συμπεράνατε ότι, αν το I είναι γνήσιο κλειστό ιδεώδες του $L^1(\mathbb{T})$, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $I \subseteq M_k$.

(iii) Αποδείξτε ότι για κάθε μέγιστο γνήσιο κλειστό ιδεώδες I του $L^1(\mathbb{T})$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $I = M_k$.

(iv) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (iii), αποδείξτε το **Θεώρημα του Wiener** της άσκησης 3.

5. Είναι γνωστό ότι το σύνολο $l^1(\mathbb{Z})$ είναι χώρος Banach με νόρμα που ορίζεται ως εξής:
$$\|a\|_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|, \qquad \text{για } a = (a_k) \in l^1(\mathbb{Z}).$$
(i) Εκτός από την πράξη της πρόσθεσης ακολουθιών και την πράξη του γινομένου αριθμού και ακολουθίας, ορίζεται και η πράξη της συνέλιξης στον $l^1(\mathbb{Z})$ ως εξής:
$$a * b = \big((a * b)_k\big), \qquad \text{για } a = (a_k), b = (b_k) \in l^1(\mathbb{Z})$$
όπου
$$(a * b)_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{k-m} b_m \qquad \text{για } k \in \mathbb{Z}.$$
Αποδείξτε ότι η συνέλιξη είναι καλώς ορισμένη στο $l^1(\mathbb{Z})$, δηλαδή ότι $a * b \in l^1(\mathbb{Z})$ για κάθε $a, b \in l^1(\mathbb{Z})$ και μάλιστα ότι ισχύει
$$\|a * b\|_1 \leqslant \|a\|_1 \|b\|_1 \qquad \text{για } a, b \in l^1(\mathbb{Z}).$$
Με τις τρεις αυτές πράξεις το σύνολο $l^1(\mathbb{Z})$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach με μοναδιαίο στοιχείο. Ποιό είναι το μοναδιαίο στοιχείο;

(ii) Κάθε $a = (a_k) \in l^1(\mathbb{Z})$ ορίζει 1-περιοδική συνάρτηση $\breve{a}$ στο $\mathbb{R}$ με τύπο
$$\breve{a}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{2\pi i k x}.$$
Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς, ισχύει $\breve{a} \in C(\mathbb{T})$ και $\mathcal{F}(\breve{a}) = \widehat{\breve{a}} = a$.

Το σύνολο των συναρτήσεων $\breve{a}$ που προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο από τις ακολουθίες a του $l^1(\mathbb{Z})$ συμβολίζεται
$$A(\mathbb{T}).$$
Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F} : A(\mathbb{T}) \to l^1(\mathbb{Z})$ είναι γραμμικός, ένα-προς-ένα και επί. Μάλιστα, αν ορίσουμε ως νόρμα στο $A(\mathbb{T})$ την $\|\breve{a}\|_{A(\mathbb{T})} = \|a\|_1$, τότε ο $\mathcal{F}$ είναι ισομετρία και το $A(\mathbb{T})$ είναι χώρος Banach.

Επειδή $A(\mathbb{T}) \subseteq C(\mathbb{T})$, στο $A(\mathbb{T})$ ορίζεται και η supremum νόρμα του $C(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\|\breve{a}\|_\infty \leqslant \|\breve{a}\|_{A(\mathbb{T})} \qquad \text{για κάθε } \breve{a} \in A(\mathbb{T}).$$

Αποδείξτε επίσης ότι οι δύο νόρμες στο $A(\mathbb{T})$ δεν είναι ισοδύναμες. Είναι το $A(\mathbb{T})$ κλειστό υποσύνολο του $C(\mathbb{T})$;

(iii) Αν $a, b \in l^1(\mathbb{Z})$ και $\breve{a}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{2\pi ikx}$ και $\breve{b}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{2\pi ikx}$, αποδείξτε ότι

$$\breve{a}(x)\breve{b}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (a * b)_k e^{2\pi ikx} = \widetilde{(a * b)}(x).$$

Δηλαδή, $\mathcal{F}(\breve{a}\breve{b}) = a * b = \mathcal{F}(\breve{a}) * \mathcal{F}(\breve{b})$. Επομένως το $A(\mathbb{T})$ είναι άλγεβρα (υποάλγεβρα του $C(\mathbb{T})$) και ο $\mathcal{F} : A(\mathbb{T}) \to l^1(\mathbb{Z})$ είναι ομομορφισμός αλγεβρών. Ποιό είναι το μοναδιαίο στοιχείο στην άλγεβρα $A(\mathbb{T})$;

(iv) Έστω ότι η $f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι απολύτως συνεχής και $f' \in L^2(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι $f \in A(\mathbb{T})$ και $\|f\|_{A(\mathbb{T})} \leqslant C(\|f\|_1 + \|f'\|_2)$ για κάποια απόλυτη σταθερά C.

6. (i) Ορίζουμε

$$a * b = \big((a * b)_k\big), \qquad \text{για } a = (a_k), b = (b_k) \in l^2(\mathbb{Z})$$

όπου

$$(a * b)_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{k-m} b_m \qquad \text{για } k \in \mathbb{Z}.$$

Αποδείξτε ότι $a * b \in c_0(\mathbb{Z})$ και ότι

$$\|a * b\|_\infty \leqslant \|a\|_2 \|b\|_2.$$

(ii) Έστω $g, h \in L^2(\mathbb{T})$, οπότε $gh \in L^1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\widehat{gh} = \widehat{g} * \widehat{h}.$$

(ii) Αποδείξτε τον εξής χαρακτηρισμό του συνόλου τιμών του μετασχηματισμού Fourier στον $L^1(\mathbb{T})$:

$$\mathcal{F}(L^1(\mathbb{T})) = \{a * b \mid a, b \in l^2(\mathbb{Z})\}.$$

7. Έστω $\mu \in M(\mathbb{T})$ και έστω $A = \{x \in [0, 1) \mid \mu(\{x\}) \neq 0\}$.

(i) Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\sum_{n=1}^{N} |\mu(\{x_n\})| < \|\mu\|$$

για κάθε N και κάθε $x_1, \ldots, x_N \in [0, 1)$. Βάσει αυτού αποδείξτε ότι το A είναι αριθμήσιμο και θέσατε

$$\mu_d = \sum_{x \in A} \mu(\{x\})\, \delta_x.$$

Το μ_d, επεκτεταμένο ώστε να είναι 1-περιοδικό στο $\mathbb{R}$, ονομάζεται *διακριτό μέρος* του μ. Αποδείξτε ότι το μ_d είναι 1-περιοδικό μιγαδικό μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ και ότι

$$\|\mu_d\| = \sum_{x \in A} |\mu(\{x\})| \leqslant \|\mu\|.$$

Κατόπιν θέσατε

$$\mu_c = \mu - \mu_d.$$

Το μ_c ονομάζεται *συνεχές μέρος* του μ. Αποδείξτε ότι το 1-περιοδικό μιγαδικό μέτρο Borel μ_c στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχές, δηλαδή ότι ισχύει

$$\mu_c(\{x\}) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Αποδείξτε το **Θεώρημα του Wiener**:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{\mu}(k)|^2 = \sum_{x \in A} |\mu(\{x\})|^2.$$

Υπόδειξη: Πρώτα θεωρήστε την περίπτωση: $\mu = \mu_d = \sum_{x\in A} \mu(\{x\})\,\delta_x$ και το A είναι πεπερασμένο. Αν το A είναι άπειρο αριθμήσιμο, δηλαδή $A = \{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}$, τότε για τυχόν $\epsilon > 0$ γράψτε

$$\mu' = \sum_{j=1}^{m} \mu(\{x_j\})\,\delta_{x_j} \quad \text{και} \quad \mu'' = \sum_{j=m+1}^{+\infty} \mu(\{x_j\})\,\delta_{x_j},$$

όπου $\sum_{j=m+1}^{+\infty} |\mu(\{x_j\})| < \epsilon$. Τέλος, στην περίπτωση $\mu = \mu_c$ αποδείξτε την επιθυμητή ισότητα με 0 στο δεξιό μέρος.

8. Αν $t \neq 0$, θεωρήστε την σειρά Fourier της 1-περιοδικής συνάρτησης με τύπο $f(x) = e^{2\pi t x}$ για $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ και αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2+n^2} = \frac{\pi}{2t}\,\frac{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}} - \frac{1}{2t^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t^2+n^2} = \frac{2\pi t-(e^{\pi t}-e^{-\pi t})}{2t^2(e^{\pi t}-e^{-\pi t})}.$$

   Συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ η σειρά Fourier της f;

9. (i) Αν $g, h \in L^2(\mathbb{T})$, αποδείξτε ότι ορίζεται η συνέλιξη

$$(g * h)(x) = \int_0^1 g(x-y)h(y)\,dy \qquad \text{για κάθε } x$$

   και ότι $g * h \in C(\mathbb{T})$.

   (ii) Αποδείξτε ότι $f \in A(\mathbb{T})$ (δείτε την άσκηση 5) αν και μόνο αν η f είναι συνέλιξη δύο συναρτήσεων στον $L^2(\mathbb{T})$.

10. Έστω ότι η f είναι απολύτως συνεχής στο $[0, \frac{1}{2}]$ με $f' \in L^2(\mathbb{T})$ και $f(0) = f(\frac{1}{2}) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^{1/2} |f'(x)|^2\,dx \geqslant 4\pi^2 \int_0^{1/2} |f(x)|^2\,dx. \qquad (\textbf{Ανισότητα του Wirtinger})$$

   Για ποιές συναρτήσεις f ισχύει η ισότητα;

11. Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ και έστω ότι $|f(x+y) - f(x)| \leqslant M|y|^a$ για κάποιο $a \in (0,1]$, κάποιο $M \geqslant 0$ και για κάθε $y \in [-1/2, 1/2]$.

   (i) Αν $0 < a < 1$, αποδείξτε ότι $|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \frac{cM}{1-a}\,\frac{1}{n^a}$ για κάποια σταθερά c και για κάθε n.

   (ii) Αν $a = 1$, αποδείξτε ότι $|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leqslant cM\,\frac{\log n}{n}$ για κάποια σταθερά c και για κάθε n.

12. Έστω άρτια $(a_k) \in c_0(\mathbb{Z})$ έτσι ώστε $a_k \geqslant 0$ για κάθε k και $a_{k-1} + a_{k+1} - 2a_k \geqslant 0$ για κάθε $k \geqslant 1$.

   (i) Αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_0$, ότι $k(a_k - a_{k+1}) \to 0$ και ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(a_{k-1} + a_{k+1} - 2a_k) = a_0.$$

   (ii) Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(a_{k-1} + a_{k+1} - 2a_k)F_{k-1}(x)$$

   συγκλίνει στον $L^1(\mathbb{T})$ σε μία συνάρτηση f και ότι $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε k.
   Ειδικότερα, υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}, k\neq 0} \frac{e^{2\pi i k x}}{\log(|k|+1)}.$$

   Να αντιπαραβάλετε με το (vi) της άσκησης 9 του πρώτου φυλλαδίου.

13. Έστω ακολουθία $a = (a_k)$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$h_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} (1 - \tfrac{|k|}{n+1}) a_k e^{2\pi i k x} \qquad \text{για } n \geqslant 0.$$

(i) Έστω $1 < p \leqslant +\infty$. Αποδείξτε ότι η a είναι ο μετασχηματισμός Fourier μίας συνάρτησης στον $L^p(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν $\sup_n \|h_n\|_p < +\infty$.

(ii) Αποδείξτε ότι η a είναι ο μετασχηματισμός Fourier ενός μέτρου στον $M(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν $\sup_n \|h_n\|_1 < +\infty$.

(iii) Αποδείξτε ότι η a είναι ο μετασχηματισμός Fourier ενός θετικού μέτρου στον $M(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν $h_n(x) \geqslant 0$ για κάθε x και κάθε n.

(iv) Λέμε ότι η a είναι *θετικά ορισμένη* αν για κάθε $N \geqslant 0$ και κάθε $z_0, z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$\sum_{k,m=0}^{N} a_{k-m} z_k \overline{z_m} \geqslant 0.$$

Αποδείξτε το **Θεώρημα του Herglotz**: Η a είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν είναι μετασχηματισμός Fourier ενός θετικού μέτρου στον $M(\mathbb{T})$.

Υπόδειξη: Αν η a είναι μετασχηματισμός Fourier ενός θετικού μέτρου στον $M(\mathbb{T})$ τότε εύκολα προκύπτει ότι η a είναι θετικά ορισμένη. Αντιστρόφως, έστω ότι η a είναι θετικά ορισμένη. Χρησιμοποιώντας τους αριθμούς $z_k = e^{2\pi i k x}$ για $k = 0, 1, \ldots, N$, αποδείξτε ότι $h_N(x) \geqslant 0$ για κάθε x και κάθε $N \geqslant 0$.