

Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Δέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Η σ.τ.μ. X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 2]$ και η σ.τ.μ. Y ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[2, 4]$. Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, να υπολογίσετε την πιθανότητα η διαφορά $Y - X$ να είναι ≤ 1 .
2. Λέμε ότι η σ.τ.μ. (X, Y) ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $R \subseteq \mathbb{R}^2$ αν η συνάρτηση πυκνότητάς της έχει τύπο

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k, & \text{αν } (x, y) \in R \\ 0, & \text{αν } (x, y) \notin R \end{cases}$$

όπου $k > 0$ είναι μια σταθερά. Είδαμε δύο τέτοια παραδείγματα σε δύο ασκήσεις του ένατου φυλλαδίου: στην μία το R είναι ορθογώνιο και στην άλλη το R είναι τρίγωνο.

(i) Βρείτε την σταθερά k .

Στα επόμενα θεωρήστε την ειδική περίπτωση $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(ii) Ποιά είναι η σταθερά k ;

(iii) Ποιές είναι οι περιθώριες f_X και f_Y ; είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

(iv) Βρείτε την f_Z για την σ.τ.μ. $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Ποιά είναι η $\mathbb{E}(Z)$;

(v) Βρείτε την f_W για την σ.τ.μ. $W = X + Y$. Ποιά είναι η $\mathbb{E}(W)$;

3. Οι σ.τ.μ. X, Y ακολουθούν η καθεμία την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, 1)$ και είναι ανεξάρτητες.
 - (i) Ποιά κατανομή ακολουθεί η (X, Y) ;
 - (ii) Ποιός είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων της (X, Y) ;
 - (iii) Βρείτε την f_Z για την σ.τ.μ. $Z = X^2 + Y^2$.
 - (iv) Αν $U = X + Y, V = X - Y$, ποιά κατανομή ακολουθεί η (U, V) ;
 - (v) Ποιός είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων της (U, V) ; Είναι οι U, V ανεξάρτητες;

1. $1/8$.

2. (i) $k = 1/\epsilon\mu\beta(R)$.

(ii) $k = 1/\pi$.

$$(iii) f_X(x) = \begin{cases} 2\sqrt{1-x^2}/\pi, & \alpha\nu x \in [-1, 1] \\ 0, & \alpha\nu x \notin [-1, 1] \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2\sqrt{1-y^2}/\pi, & \alpha\nu y \in [-1, 1] \\ 0, & \alpha\nu y \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Όχι.

$$(iv) f_Z(z) = \begin{cases} 2z, & \alpha\nu z \in [0, 1] \\ 0, & \alpha\nu z \notin [0, 1] \end{cases} \quad \mathbb{E}(Z) = 2/3.$$

$$(v) f_W(w) = \begin{cases} \sqrt{2-w^2}/\pi, & \alpha\nu w \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ 0, & \alpha\nu w \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \end{cases} \quad \mathbb{E}(W) = (4\sqrt{2})/(3\pi).$$

3. (i) Την κανονική με $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$.

$$(ii) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(iii) f_Z(z) = \begin{cases} (1/2)e^{-z/2}, & \alpha\nu z \geq 0 \\ 0, & \alpha\nu z < 0 \end{cases}$$

(iv) Την κανονική με $f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2\pi \cdot 2}e^{-(u^2/2+v^2/2)/2}$.

$$(v) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{Ναι.}$$