Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Ενδέκατο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Αν η X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$, χρησιμοποιήστε την ανισότητα Chebychev για να αποδείξετε ότι $P(X \geq \lambda + 1) \leq \lambda$ και $P(X \leq \lambda/3) \leq 9\lambda/4$.

2. Αν το (X, Y) ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσες τιμές $(0, 0)$ και πίνακα διακυμάνσεων $\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$, όπου $|\rho| < 1$, βρείτε την $\mathbb{E}(\max\{X, Y\})$.

3. Έστω ότι η (X, Y) είναι ομοιόμορφη στο τρίγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(0, 1)$ και $(1, 1)$. Βρείτε τις πιθανότητες $P(X > 1/2)$, $P(Y < 1/3)$ και $P(X > 1/2, Y < 1/3)$.

4. Έστω ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$. Βρείτε την κατανομή της $X/(X + Y)$.

5. Έστω ότι η (X, Y) ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στον δίσκο $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Θεωρούμε την (R, Θ) η οποία ορίζεται από τις σχέσεις $X = R \cos \Theta$, $Y = R \sin \Theta$, όπου $0 < R \leq 1$, $0 \leq \Theta < 2\pi$. Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας της (R, Θ) και εξετάστε αν οι R, Θ είναι ανεξάρτητες.

6. (i) Βρείτε την ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της X η οποία ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$.
   (ii) Αν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$, βρείτε την ροπογεννήτρια $M_S(t)$ της $S = X_1 + X_2/2 + \cdots + X_n/n$.

2. $\sqrt{(1-\rho)/\pi}$.

3. $1/4$, $1/9$ και 0.

4. Ομοιόμορφη στο διάστημα $[0,1]$.

5. $f_{R,\Theta}(r,\theta) = \begin{cases} r/\pi, & (r,\theta) \in (0,1] \times [0,2\pi) \\ 0, & (r,\theta) \notin (0,1] \times [0,2\pi) \end{cases}$ Ναι.

6. (i) $M_X(t) = \lambda/(\lambda - t)$ για $t < \lambda$.
   (ii) $M_S(t) = \frac{n!\lambda^n}{(\lambda-t)(2\lambda-t)\cdots(n\lambda-t)}$ για $t < \lambda$.