Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. (i) Αν $P(A) = 1/3$, $P(A \cup B) = 1/2$ και $P(A \cap B) = 1/4$, βρείτε την $P(B)$. (ii) Αν $P(A) = P(B) = 3/4$, βρείτε την ελάχιστη δυνατή και την μέγιστη δυνατή τιμή της $P(A \cap B)$.

2. Ρίχνουμε τυχαία n βώλους σε r δοχεία. Ποιά είναι η πιθανότητα το πρώτο δοχείο να περιέχει ακριβώς j βώλους;

3. Ένα δοχείο περιέχει n καλές και m χαλασμένες λάμπες. Αν επιλέξουμε τυχαία r $(r \leq n)$ λάμπες, ποιά είναι η πιθανότητα να είναι όλες καλές;

4. Επιλέγουμε τυχαία τέσσερα χαρτιά από μία τράπουλα. Ποιά είναι η πιθανότητα τρία από αυτά να είναι μαύρα και ένα κόκκινο;

5. Ανοίγουμε τυχαία ένα-ένα τα χαρτιά μιας τράπουλας μέχρι να βρούμε πρώτη φορά άσσο. Ποιά είναι η πιθανότητα να συμβεί αυτό στο n-οστό χαρτί;

6. (i) Ο Τάσος και η Γκόλφω πρόκειται να χορέψουν με άλλα δέκα νέα παιδιά, τσέλιγκες και τσελιγκοπούλες, σε ευθεία γραμμή, τυχαία κατανεμημένοι. Ποιά είναι η πιθανότητα να τους χωρίζουν έξι παιδιά; Ποιά είναι η ίδια πιθανότητα αν χορέψουν σε κύκλο;
(ii) Το ίδιο σκηνικό με πριν. Αν επιθυμεί, διακαώς αλλά και κρυφίως, ο φλογερός Τάσος να χορέψει πλάι-πλάι με την χαμηλοβλεπούσα Γκόλφω, τί πρέπει να προτείνει στην παρέα; Να χορέψουν σε ευθεία γραμμή ή σε κύκλο;

7. Στον τετράγωνο περίβολο της εκκλησίας με πλευρά είκοσι μέτρων βρίσκονται δέκα ανύπαντρες φίλες της νύφης. Η νύφη ρίχνει τυχαία την ανθοδέσμη μέσα στον περίβολο. Ποιά είναι η ελάχιστη πιθανότητα να μην πιάσει καμία από τις δέκα φίλες την ανθοδέσμη, αν υποθέσουμε ότι καθεμιά από αυτές φτάνει ένα μέτρο μακριά από το σημείο που στέκεται; Πώς πρέπει να ακροβολιστούν οι φίλες ώστε να εξασφαλίσουν τουλάχιστον αυτήν την κακιά(;) πιθανότητα; Παρεμπιπτόντως, ποιά είναι η μέγιστη κακιά(;) πιθανότητα;

8. Σε μια λίμνη ζουν πάρα πολλά ψαράκια. Από την χρονική στιγμή $t = 0$, που η κακιά μοίρα αποφασίζει να χτυπήσει αλύπητα τα ψαράκια, το ποσοστό του πληθυσμού τους που απομένει κάθε χρονική στιγμή t είναι ίσο με $e^{-\lambda t}$, όπου $\lambda > 0$ είναι μια παράμετρος. (i) Ποιά είναι η πιθανότητα να ζήσει για πάντα το αγαπημένο μας ψαράκι, ο Σωτήρης; (ii) Ποιά είναι η πιθανότητα να χαρούμε το δεύτερο αγαπημένο μας ψαράκι, την Πετρούλα, για χρονικό διάστημα τουλάχιστον 1 από τότε που θα μας αφήσει ο Σωτήρης; (Γνωρίζω δύο τρόπους να απαντήσω το ερώτημα αυτό. Για τον έναν από αυτούς, σκεφτείτε (και αιτιολογήστε) ότι κάθε χρονική στιγμή t_0 το φαινόμενο είναι σαν να ξεκινά από την αρχή.)

1. (i) $5/12$. (ii) $1/2$ και $3/4$.

2. $\binom{n}{j}(r-1)^{n-j}/r^n$.

3. $\binom{n}{r}/\binom{n+m}{r}$.

4. $\binom{26}{3}\binom{26}{1}/\binom{52}{4} \approx 0,24969988$.

5. $4(48)_{n-1}/(52)_n$. Π.χ. για $n = 1$ η πιθανότητα είναι $\approx 0,076923077$, για $n = 20$ είναι $\approx 0,018321175$ και για $n = 49$ είναι $\approx 0,000003694$.

6. (i) $10/132 \approx 0,075757576$, $2/11 \approx 0,181818182$. (ii) Σε κύκλο.

7. Ελάχιστη κακιά(;) πιθανότητα: $1 - \pi/40 \approx 0,92146025$. Μεγάλη. Μάλλον ανύπαντρες θα μείνουν. Μέγιστη κακιά(;) πιθανότητα: $1 - \pi/1600 \approx 0,998036506$.

8. (i) Δυστυχώς, 0. (ii) $e^{-\lambda}/2$.