Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Πέμπτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Σε ένα πρόβλημα πολλαπλής επιλογής προτείνονται n απαντήσεις από τις οποίες μόνο μία είναι σωστή. Αν η σωστή απάντηση κερδίζει μία μονάδα, πόση πρέπει να είναι η αρνητική βαθμολογία κάθε λάθος απάντησης ώστε το αναμενόμενο κέρδος του φοιτητή που επιλέγει στην τύχη να είναι ίσο με 0;

2. Έστω ότι ένας παίκτης ρίχνει διαδοχικά ένα αμερόληπτο νόμισμα. Στην n ρίψη στοιχηματίζει 2^{n-1} ευρώ ότι θα προκύψει Κ, για κάθε $n = 1, \ldots, N$. (Αν προκύψει Κ ο παίκτης κερδίζει 2^{n-1} ευρώ ενώ αν προκύψει Γ χάνει 2^{n-1} ευρώ.) Το παιχνίδι σταματά την πρώτη φορά που θα προκύψει Κ ή όταν ολοκληρωθεί η N ρίψη, ανεξάρτητα από το αποτέλεσμά της. Ποιό είναι το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη;

3. Ένα σωμάτιο κινείται πάνω σε συγκεκριμένη ευθεία. Κάθε χρονική στιγμή $t = 1, 2, 3, \ldots$ κάνει βήμα $+1$ (δεξιά) με πιθανότητα p ή βήμα -1 (αριστερά) με πιθανότητα $1 - p$. Η θέση του την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι στο σημείο 0. Έστω X_n η θέση του σωματίου την χρονική στιγμή n. Αποδείξτε ότι η τ.μ. $Y_n = (X_n + n)/2$ είναι δ.τ.μ. η οποία ακολουθεί την δυωνυμική κατανομή και βάσει αυτού βρείτε την $\mathbb{E}(X_n)$ και την $\mathrm{Var}(X_n)$.

4. Αν η πιθανότητα επιτυχούς βολής κατά στόχου είναι $0,3$, να υπολογίσετε τον αριθμό των βολών που απαιτούνται ώστε η πιθανότητα να χτυπηθεί ο στόχος τουλάχιστον μία φορά να είναι τουλάχιστον $0,9$.

5. Σε ένα βιβλίο 800 σελίδων περιέχονται 40 τυπογραφικά λάθη τυχαία κατανεμημένα. Προσεγγίζοντας με την κατανομή Poisson, να υπολογίσετε την πιθανότητα μία τυχαία σελίδα του βιβλίου να περιέχει n λάθη. Ποιά είναι η πιθανότητα από 10 σελίδες τυχαία επιλεγμένες να υπάρχουν ακριβώς 3 χωρίς λάθος;

6. Έστω ότι οι ανεξάρτητες δ.τ.μ. X_1 και X_2 ακολουθούν την κατανομή Poisson με παραμέτρους λ_1 και λ_2, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι η δ.τ.μ. $X_1 + X_2$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_1 + \lambda_2$.

7. Έχει διαπιστωθεί ότι $0,1\%$ του πληθυσμού εμπλέκεται σε ένα τουλάχιστον δυστύχημα κάθε χρόνο. Μία ασφαλιστική εταιρεία έχει πέντε χιλιάδες πελάτες. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες (i) το πολύ τρεις πελάτες να εμπλακούν σε δυστύχημα τον επόμενο χρόνο, (ii) το πολύ δύο πελάτες να εμπλακούν σε δυστύχημα σε κάθε ένα από τα επόμενα δύο χρόνια, (iii) το πολύ τέσσερις πελάτες να εμπλακούν σε δυστύχημα τα επόμενα δύο χρόνια. Για το (iii) είναι βολικό να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα της άσκησης 6.

8. Έχουμε μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να απαιτηθεί άρτιος αριθμός αποτυχιών μέχρι την N επιτυχία.

9. Αν X είναι δ.τ.μ. και με ακέραιες πιθανές τιμές, δηλαδή $P(X \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = 0$, αποδείξτε ότι $\mathbb{E}(X) = -\sum_{n=1}^{+\infty} F_X(-n) + \sum_{n=0}^{+\infty}(1 - F_X(n))$.

1. $-1/(n-1)$.
2. 0.
3. $\mathbb{E}(X_n) = n(2p-1)$, $\mathrm{Var}(X_n) = 4np(1-p)$
4. 7.
5. (i) $f_X(n) = e^{-0,5}\frac{(0,5)^n}{n!}$. (ii) $\binom{3}{10}(e^{-0,5})^3(1-e^{-0,5})^7$.
7. (i) $e^{-5}(1+\frac{5}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!})$. (ii) $e^{-10}(1+\frac{5}{1!}+\frac{5^2}{2!})^2$. (iii) $e^{-10}(1+\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+\frac{10^4}{4!})$.
8. $\frac{1}{2}+\frac{p^N}{2(2-p)^N}$.