Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Λύσεις του φυλλαδίου ασκήσεων επανάληψης.

1. *Αν $P(A) = 1/3$ και $P(A \cup B) = 3/4$, βρείτε την ελάχιστη δυνατή και την μέγιστη δυνατή τιμή της $P(B)$.*

   Το B καλύπτει οπωσδήποτε το μέρος της ένωσης $A \cup B$ το οποίο δεν καλύπτεται από το A, δηλαδή το $(A \cup B) \setminus A$. Επομένως, $(A \cup B) \setminus A \subseteq B$ και άρα

   $$P(B) \geq P((A \cup B) \setminus A) = P(A \cup B) - P(A) = 3/4 - 1/3 = 5/12.$$

   Επίσης, το B δεν μπορεί να υπερκαλύψει την ένωση $A \cup B$, δηλαδή $B \subseteq A \cup B$. Άρα

   $$P(B) \leq P(A \cup B) = 3/4.$$

2. *Αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα, αποδείξτε ότι τα A^c, B καθώς και τα A^c, B^c είναι ανεξάρτητα.*

   Έχουμε

   $$\begin{aligned} P(A^c)P(B) &= (1 - P(A))P(B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B \setminus (A \cap B)) = P(A^c \cap B). \end{aligned}$$

   Άρα τα A^c, B είναι ανεξάρτητα. Επίσης,

   $$\begin{aligned} P(A^c)P(B^c) &= (1 - P(A))(1 - P(B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A \cup B) \\ &= P((A \cup B)^c) = P(A^c \cap B^c). \end{aligned}$$

   Άρα τα A^c, B^c είναι ανεξάρτητα.

3. *Έστω F_X η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X. Εκφράστε τις πιθανότητες $P(X > a)$, $P(X = a)$ και $P(X < a)$ χρησιμοποιώντας την F_X.*

   $$\begin{aligned} &P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a). \\ &P(X = a) = F_X(a) - F_X(a-). \\ &P(X < a) = F_X(a-). \end{aligned}$$

   Όταν γράφουμε $F_X(a-)$ εννοούμε το αριστερό όριο στο a: $\lim_{x \to a-} F_X(x)$. Για το δεξιό όριο στο a, δηλαδή το $\lim_{x \to a+} F_X(x)$, γνωρίζουμε ότι είναι ίσο με την τιμή στο a, δηλαδή $F_X(a+) = F_X(a)$.

4. *Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα δύο φορές. Αν A_k είναι το ενδεχόμενο να προκύψει k φορές Κ, όπου $k = 0, 1, 2$, βρείτε την πιθανότητα $P(A_k)$.*

   Τα ενδεχόμενα είναι: ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ. Όλα έχουν αντίστοιχη πιθανότητα ίση με $1/4$. Άρα

   $$P(A_0) = 1/4, \quad P(A_1) = 1/4 + 1/4 = 1/2, \quad P(A_2) = 1/4.$$

5. *Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι δύο φορές. Αν A_k είναι το ενδεχόμενο να προκύψει άθροισμα ενδείξεων k, όπου $k = 2, 3, \ldots, 11, 12$, βρείτε την πιθανότητα $P(A_k)$.*

   Κάθε ζευγάρι ενδείξεων (i, j) έχει αντίστοιχη πιθανότητα ίση με $1/36$. Το ενδεχόμενο A_k αποτελείται από τα ζευγάρια που ικανοποιούν την $i + j = k$. Ο περιορισμός στις ενδείξεις είναι: $1 \leq i \leq 6$ και $1 \leq j \leq 6$.
   Μπορούμε να βρούμε την $P(A_k)$ καταγράφοντας όλα τα ζευγάρια (i, j) με $i + j = k$. Τότε

$P(A_k)$ είναι το πλήθος των ζευγαριών προς 36. Για παράδειγμα, στο ενδεχόμενο A_2 υπάρχει μόνο το ζευγάρι $(1,1)$ και στο "συμμετρικό" ενδεχόμενο A_{12} υπάρχει μόνο το ζευγάρι $(6,6)$. Στο ενδεχόμενο A_2 υπάρχουν τα ζευγάρια $(1,2),(2,1)$ και στο "συμμετρικό" ενδεχόμενο A_{11} υπάρχουν τα ζευγάρια $(5,6),(6,5)$. Αλλά ένας πιο "μαθηματικός" τρόπος είναι ο εξής. Έστω $2 \le k \le 7$. Τότε για κάθε $i = 1,\ldots,k-1$, υπάρχει ακριβώς μία τιμή του $j = 1,\ldots,6$ που ικανοποιεί την $i+j=k$. Επίσης, για κάθε $i \ge k$ δεν υπάρχει καμμία τιμή του $j=1,\ldots,6$ που ικανοποιεί την $i+j=k$. Άρα υπάρχουν ακριβώς $k-1$ ζευγάρια ενδείξεων στο ενδεχόμενο A_k και άρα

$$P(A_k) = (k-1)/36 \qquad \text{όταν } 2 \le k \le 7.$$

Έστω $7 \le k \le 12$. Τότε για κάθε $i = k-6,\ldots,6$, υπάρχει ακριβώς μία τιμή του $j = 1,\ldots,6$ που ικανοποιεί την $i+j=k$. Επίσης, για κάθε $i \le k-7$ δεν υπάρχει καμμία τιμή του $j=1,\ldots,6$ που ικανοποιεί την $i+j=k$. Άρα υπάρχουν ακριβώς $6-(k-6)+1 = 13-k$ ζευγάρια ενδείξεων στο ενδεχόμενο A_k και άρα

$$P(A_k) = (13-k)/36 \qquad \text{όταν } 7 \le k \le 12.$$

6. *Επιλέγουμε τυχαία δύο αριθμούς x, y στο διάστημα $[0,1]$. Οι δύο αριθμοί χωρίζουν το $[0,1]$ σε τρία υποδιαστήματα. Βρείτε την πιθανότητα τα τρία υποδιαστήματα να αποτελούν πλευρές τριγώνου.*

   Έστω $0 < x < y < 1$. Τα τρία υποδιαστήματα που σχηματίζονται έχουν μήκη $x, y-x$ και $1-y$. Για να αποτελούν αυτά πλευρές τριγώνου πρέπει να ικανοποιούν τις τρεις τριγωνικές ανισότητες

$$\left\{\begin{matrix} x < (y-x)+(1-y) \\ y-x < x+(1-y) \\ 1-y < x+(y-x) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x < 1/2 \\ y < x+1/2 \\ 1/2 < y \end{matrix}\right\}$$

   Έστω $0 < y < x < 1$. Τα τρία υποδιαστήματα που σχηματίζονται έχουν μήκη $y, x-y$ και $1-x$. Για να αποτελούν αυτά πλευρές τριγώνου πρέπει να ικανοποιούν τις τρεις τριγωνικές ανισότητες

$$\left\{\begin{matrix} y < (x-y)+(1-x) \\ x-y < y+(1-x) \\ 1-x < y+(x-y) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y < 1/2 \\ x-1/2 < y \\ 1/2 < x \end{matrix}\right\}$$

   Έτσι βρίσκουμε ότι το ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει αποτελείται από δύο τρίγωνα μέσα στο τετράγωνο $[0,1]\times[0,1] = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. Το συνολικό εμβαδόν των δύο τριγώνων είναι $1/4$ ενώ το εμβαδόν του τετραγώνου $[0,1]\times[0,1]$ είναι 1. Άρα η πιθανότητα που ζητάμε είναι $1/4$.

7. *Δύο ισοδύναμοι παίκτες, ο Α και ο Β, παίζουν ένα παιχνίδι. Αυτός που θα νικήσει πρώτος σε πέντε παιχνίδια θα πάρει 64 χρυσά νομίσματα. Η διαδικασία σταματά λόγω ανωτέρας βίας, όταν ο Α έχει κερδίσει τρία παιχνίδια και ο Β έχει κερδίσει δύο παιχνίδια. Πώς πρέπει να μοιραστούν τα 64 νομίσματα στους δύο παίκτες;*

   Το ότι οι παίκτες είναι ισοδύναμοι σημαίνει ότι η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος συγκεκριμένος από αυτούς ένα παιχνίδι είναι $1/2$.
   Καταγράφουμε τις ακολουθίες παιχνιδιών *αν συνέχιζαν μετά από το πέμπτο παιχνίδι τους* και τις αντίστοιχες πιθανότητες, ώστε να βρούμε την πιθανότητα του καθενός να κερδίσει

πρώτος σε πέντε παιχνίδια:

$$\begin{array}{cc} AA & 1/4 \\ ABA & 1/8 \\ ABBA & 1/16 \\ ABBB & 1/16 \\ BAA & 1/8 \\ BABA & 1/16 \\ BABB & 1/16 \\ BBAA & 1/16 \\ BBAB & 1/16 \\ BBB & 1/8 \end{array}$$

Άρα, *αν συνέχιζε η διαδικασία*, η πιθανότητα να κερδίσει ο Α είναι $1/4+1/8+1/16+1/8+1/16+1/16 = 11/16$ ενώ η πιθανότητα να κερδίσει ο Β είναι $1/16+1/16+1/16+1/8 = 5/16$. Επομένως, αν ο Α πάρει a νομίσματα και ο Β πάρει b νομίσματα, πρέπει να είναι $a+b=64$ και η αναλογία a/b να ισούται με την αναλογία των αντίστοιχων πιθανοτήτων, δηλαδή $a/b = 11/5$. Τελικά: $a=44$ και $b=20$.

8. *Ένας χρόνος έχει* 365 *ημέρες και όλες οι ημέρες είναι εξίσου πιθανές ως ημέρες γεννήσεων. Ποιά είναι η πιθανότητα δύο τουλάχιστον από* k *συγκεκριμένα άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα;*

   Αν A είναι το ενδεχόμενο δύο τουλάχιστον από k συγκεκριμένα άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα, τότε A^c είναι το ενδεχόμενο τα k άτομα να έχουν γενέθλια k διαφορετικές ημέρες. Το πρώτο άτομο έχει πιθανότητα $\frac{365}{365}$ να γεννηθεί οποιαδήποτε ημέρα του χρόνου. Το δεύτερο άτομο έχει πιθανότητα $\frac{364}{365}$ να γεννηθεί οποιαδήποτε ημέρα διαφορετική από την ημέρα που γεννήθηκε το πρώτο άτομο. Το τρίτο άτομο έχει πιθανότητα $\frac{363}{365}$ να γεννηθεί οποιαδήποτε ημέρα διαφορετική από την ημέρα που γεννήθηκαν το πρώτα δύο άτομα. Και ούτω καθεξής. Άρα

$$P(A^c) = \frac{365}{365}\,\frac{364}{365}\cdots\frac{365-k+1}{365} = \frac{365\,364\cdots(365-k+1)}{365^k}$$

   και $P(A) = 1 - P(A^c)$.

9. *Ένα δοχείο περιέχει* n *βώλους αριθμημένους από το* 1 *έως το* n. *Επιλέγουμε διαδοχικά και χωρίς επανατοποθέτηση τρεις βώλους. Ποιά είναι η πιθανότητα ο αριθμός του πρώτου βώλου να είναι μικρότερος από τον αριθμό του δεύτερου βώλου; Ποιά είναι η πιθανότητα ο αριθμός του πρώτου βώλου να είναι ο μικρότερος και ο αριθμός του τρίτου βώλου να είναι ο μεγαλύτερος από τους τρείς;*

   Ας ονομάσουμε a, b, c τους αριθμούς των τριών βώλων και ας συμφωνήσουμε να γράφουμε διαδοχικά τους αριθμούς ώστε αριστερά να βρίσκεται ο μικρότερος.
   Επειδή η διάταξη ab είναι ισοπίθανη με την διάταξη ba, συνεπάγεται ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου ab είναι $1/2$.
   Ομοίως, οι διατάξεις $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ είναι ισοπίθανες. Άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου abc είναι $1/6$.

10. *Ρίχνουμε τρία αμερόληπτα ζάρια. Ποιά είναι η πιθανότητα το άθροισμα των τριών ενδείξεων να είναι μεγαλύτερο από* 10*;*

    Έστω (i,j,k) η τριάδα των ενδείξεων. Κάθε τριάδα έχει πιθανότητα εμφάνισης $1/6^3$. Οι πιθανές τιμές του αθροίσματος $i+j+k$ είναι οι ακέραιοι $3,4,\ldots,17,18$. Αυτοί οι ακέραιοι "μοιράζονται στη μέση": οι *οκτώ* αριθμοί $3,4,\ldots,10$ και οι *οκτώ* αριθμοί $11,\ldots,17,18$. Εμείς θέλουμε την πιθανότητα το άθροισμα να είναι ανάμεσα στους οκτώ δεύτερους αριθμούς. Αν αποδείξουμε ότι ο αριθμός των τριάδων με άθροισμα ανάμεσα στους οκτώ πρώτους αριθμούς είναι ίσος με τον αριθμό των τριάδων με άθροισμα ανάμεσα στους οκτώ δεύτερους αριθμούς, τότε το ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει έχει πιθανότητα $1/2$.

Ας πάρουμε οποιαδήποτε τριάδα (i, j, k). Σ' αυτήν αντιστοιχεί μια "συμμετρική" τριάδα: η $(i', j', k') = (7-i, 7-j, 7-k)$. (Σκεφτείτε: όταν το i ανεβαίνει από το 1 έως το 6, το $i' = 7-i$ κατεβαίνει από το 6 έως το 1.) Η σχέση ανάμεσα στις τριάδες (i, j, k), (i', j', k') είναι αμφιμονοσήμαντη. Όταν η τριάδα (i, j, k) δίνει άθροισμα $i + j + k$, η συμμετρική τριάδα (i', j', k') δίνει άθροισμα

$$i' + j' + k' = 21 - (i + j + k).$$

Τα δύο αθροίσματα είναι "συμμετρικά":

$$11 \leq i + j + k \leq 18 \;\Leftrightarrow\; 3 \leq i' + j' + k' \leq 10.$$

Άρα για κάθε τριάδα (i, j, k) με άθροισμα ανάμεσα στους οκτώ δεύτερους αριθμούς υπάρχει αντίστοιχη τριάδα με άθροισμα ανάμεσα στους οκτώ πρώτους αριθμούς. Άρα τα αντίστοιχα πλήθη τριάδων είναι ίσα και άρα η πιθανότητα που ζητάμε είναι $1/2$.

11. *Ένα δοχείο περιέχει k άσπρους βώλους και $n-k$ μαύρους βώλους. Επιλέγουμε διαδοχικά και τυχαία έναν βώλο. Κάθε φορά που βρίσκουμε άσπρο βώλο τον ξανατοποθετούμε στο δοχείο ενώ κάθε φορά που βρίσκουμε μαύρο βώλο τοποθετούμε στο δοχείο, αντί αυτού, έναν άσπρο βώλο. Ποιά είναι η πιθανότητα να βρούμε άσπρο βώλο στην τρίτη επιλογή μας.*

    Έστω A_k και M_k τα ενδεχόμενα να βρούμε άσπρο ή μαύρο βώλο στην k επιλογή, όπου $k = 1, 2, 3$. Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου στην k επιλογή (όπου $k = 2, 3$) εξαρτάται από την κατάσταση, ως προς τα πλήθη των άσπρων και των μαύρων βώλων, που έχει διαμορφωθεί από τις προηγούμενες επιλογές. Άρα

$$\begin{aligned}
P(A_3) &= P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_1 \cap A_2) + P(A_3|A_1 \cap M_2)P(A_1 \cap M_2) \\
&\quad + P(A_3|M_1 \cap A_2)P(M_1 \cap A_2) + P(A_3|M_1 \cap M_2)P(M_1 \cap M_2) \\
&= P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_3|A_1 \cap M_2)P(M_2|A_1)P(A_1) \\
&\quad + P(A_3|M_1 \cap A_2)P(A_2|M_1)P(M_1) + P(A_3|M_1 \cap M_2)P(M_2|M_1)P(M_1) \\
&= \frac{k}{n}\frac{k}{n}\frac{k}{n} + \frac{k+1}{n}\frac{n-k}{n}\frac{k}{n} + \frac{k+1}{n}\frac{k+1}{n}\frac{n-k}{n} + \frac{k+2}{n}\frac{n-k-1}{n}\frac{n-k}{n} \\
&= \frac{kn^2 + 2n^2 - 2kn - n + k}{n^3}.
\end{aligned}$$

12. *Έστω ότι το ποσοστό των γυναικών μιας γεωγραφικής περιοχής που πάσχουν από καρκίνο της μήτρας είναι $0,001$. Το τεστ Παπανικολάου κάνει ορθή διάγνωση της ασθένειας με πιθανότητα $0,97$. Αν το τεστ για μια γυναίκα είναι θετικό, ποιά είναι η πιθανότητα η γυναίκα να πάσχει από καρκίνο της μήτρας;*

    Η γενική πιθανότητα να πάσχει μια γυναίκα από καρκίνο της μήτρας είναι $P(\Pi) = 1/1000$ ενώ η πιθανότητα να μην πάσχει είναι $P(\Delta\Pi) = 999/1000$. Άρα η πιθανότητα να πάσχει μια γυναίκα με δεδομένο ότι το τεστ είναι θετικό είναι

$$P(\Pi|\Theta) = \frac{P(\Theta|\Pi)P(\Pi)}{P(\Theta|\Pi)P(\Pi) + P(\Theta|\Delta\Pi)P(\Delta\Pi)} = \frac{\frac{97}{100}\frac{1}{1000}}{\frac{97}{100}\frac{1}{1000} + \frac{3}{100}\frac{999}{1000}} = \frac{97}{3094}.$$

13. *Ένας πομπός εκπέμπει σήματα 0 και 1 με αναλογία ένα προς δύο. Ο δέκτης Α λαμβάνει λανθασμένο σήμα στο 2% των περιπτώσεων ενώ ο δέκτης Β λαμβάνει λανθασμένο σήμα στο 3% των περιπτώσεων. Αν ο Α λάβει σήμα 0 και ο Β λάβει σήμα 1, ποιόν από τους δύο πρέπει να εμπιστευτούμε;*

    Έστω Π_0 και Π_1 τα ενδεχόμενα να στείλει σήμα 0 και 1, αντίστοιχα, ο πομπός. Τότε είναι

$P(\Pi_0) = 1/3$ και $P(\Pi_1) = 2/3$.
Κωδικοποιούμε την κατάσταση με τον δέκτη Α ως εξής: A_0 και A_1 είναι τα ενδεχόμενα να λάβει ο Α σήμα 0 και 1, αντίστοιχα. Τότε η πιθανότητα να έχει εκπέμψει σήμα 0 ο πομπός με δεδομένο ότι έλαβε σήμα 0 ο δέκτης Α είναι

$$P(\Pi_0|A_0) = \frac{P(A_0|\Pi_0)P(\Pi_0)}{P(A_0|\Pi_0)P(\Pi_0) + P(A_0|\Pi_1)P(\Pi_1)} = \frac{\frac{98}{100}\frac{1}{3}}{\frac{98}{100}\frac{1}{3} + \frac{2}{100}\frac{2}{3}} = \frac{98}{102} \approx 0,96.$$

Ομοίως, η πιθανότητα να έχει εκπέμψει σήμα 1 ο πομπός με δεδομένο ότι έλαβε σήμα 1 ο δέκτης Β είναι

$$P(\Pi_1|B_1) = \frac{P(B_1|\Pi_1)P(\Pi_1)}{P(B_1|\Pi_1)P(\Pi_1) + P(B_1|\Pi_0)P(\Pi_0)} = \frac{\frac{97}{100}\frac{2}{3}}{\frac{97}{100}\frac{2}{3} + \frac{3}{100}\frac{1}{3}} = \frac{194}{197} \approx 0,98.$$

Άρα εμπιστευόμαστε τον δέκτη Β.

14. *Ο παίκτης Α ρίχνει αμερόληπτο νόμισμα n φορές. Αν ο Α φέρει k φορές Κ, με $k = 0, 1, \ldots, n$, τότε ο παίκτης Β ρίχνει το ίδιο νόμισμα k φορές. Βρείτε (i) την πιθανότητα ο Β να φέρει m φορές Κ, όπου $m = 0, 1, \ldots, n$, (ii) την πιθανότητα ο Α να είχε φέρει k φορές Κ δεδομένου ότι ο Β έφερε m φορές Κ, όπου $k = m, \ldots, n$.*
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον τύπο $\binom{k}{m}\binom{n}{k} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$, αφού τον αποδείξετε.

Αποδεικνύουμε τον δοσμένο τύπο:

$$\begin{aligned}\binom{k}{m}\binom{n}{k} &= \frac{k!}{m!(k-m)!}\,\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!}\,\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.\end{aligned}$$

(i) Έστω A_k το ενδεχόμενο ο Α να φέρει k φορές Κ και B_m το ενδεχόμενο ο Β να φέρει m φορές Κ. Τότε

$$\begin{aligned}P(B_m) &= P(B_m|A_m)P(A_m) + P(B_m|A_{m+1})P(A_{m+1}) + \cdots + P(B_m|A_n)P(A_n) \\ &= \sum_{k=m}^{n} P(B_m|A_k)P(A_k) = \sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\frac{1}{2^k}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} = \binom{n}{m}\frac{1}{2^n}\sum_{k=m}^{n}\binom{n-m}{k-m}\frac{1}{2^k} \\ &= \binom{n}{m}\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n-m}\binom{n-m}{j}\frac{1}{2^{m+j}} = \binom{n}{m}\frac{1}{2^{n+m}}\sum_{j=0}^{n-m}\binom{n-m}{j}\frac{1}{2^j} \\ &= \binom{n}{m}\frac{1}{2^{n+m}}\left(\frac{1}{2}+1\right)^{n-m} = \binom{n}{m}\frac{3^{n-m}}{4^n}.\end{aligned}$$

Για την προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον τύπο του Newton

$$\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}x_1^j x_2^{N-j} = (x_1 + x_2)^N$$

με $N = n - m$, $x_1 = 1/2$ και $x_2 = 1$.
(ii) Επίσης

$$P(A_k|B_m) = \frac{P(B_m|A_k)P(A_k)}{P(B_m)} = \frac{\binom{k}{m}\frac{1}{2^k}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}}{\binom{n}{m}\frac{3^{n-m}}{4^n}} = \frac{\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}\frac{1}{2^{n+k}}}{\binom{n}{m}\frac{3^{n-m}}{4^n}} = \binom{n-m}{k-m}\frac{2^{n-k}}{3^{n-m}}.$$

15. *Η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση κατανομής με τύπο*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1/4, & 0 \le x < 1 \\ 1/2, & 1 \le x < 3 \\ 3/4, & 3 \le x < 5 \\ 1, & 5 \le x < +\infty \end{cases}$$

Είναι η X διακριτή; Αν ναι, ποιές είναι οι πιθανές τιμές της, ποιά είναι η συνάρτηση πιθανότητας f_X και ποιές είναι οι τιμές των $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$;

Η F_X παρουσιάζει άλματα στα σημεία $0, 1, 3$ και 5 και

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= F_X(0) - F_X(0-) = 1/4 \\ P(X = 1) &= F_X(1) - F_X(1-) = 1/4 \\ P(X = 3) &= F_X(3) - F_X(3-) = 1/4 \\ P(X = 5) &= F_X(5) - F_X(5-) = 1/4. \end{aligned}$$

Αυτές οι τέσσερις πιθανότητες έχουν άθροισμα 1. Δηλαδή $P(X \in \{0, 1, 3, 5\}) = 1$ και άρα $P(X \notin \{0, 1, 3, 5\}) = 0$. Επομένως η X είναι διακριτή τ.μ. με πιθανές τιμές $0, 1, 3, 5$. Η συνάρτηση πιθανότητας είναι η

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4, & x \in \{0, 1, 3, 5\} \\ 0 & x \notin \{0, 1, 3, 5\} \end{cases}$$

Τώρα,

$$\mathbb{E}(X) = 0\, f_X(0) + 1\, f_X(1) + 3\, f_X(3) + 5\, f_X(5) = 9/4.$$

Επίσης,

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2\, f_X(0) + 1^2\, f_X(1) + 3^2\, f_X(3) + 5^2\, f_X(5) = 35/4$$

και άρα

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 59/16.$$

16. *Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο στο διάστημα $[0, 4]$. Τα διάφορα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα A του $[0, 4]$ με πιθανότητα $P(A) = |A|/4$, όπου $|A|$ είναι το μήκος του A. Θεωρούμε ως τυχαία μεταβλητή X την θέση του σημείου που επιλέγουμε. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της συνάρτησης κατανομής F_X. Είναι η X συνεχής; Αν ναι, ποιά είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_X και ποιά είναι η τιμή της $\mathbb{E}(X)$;*

Οποιοδήποτε ενδεχόμενο η X να πάρει τιμή σε σύνολο A το οποίο δεν τέμνει το $[0, 4]$ έχει πιθανότητα 0. Άρα όταν $x < 0$ έχουμε

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \in (-\infty, x]) = 0.$$

Όταν $0 \le x \le 4$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X \le x) &= P(X < 0) + P(0 \le X \le x) \\ &= P(X \in (-\infty, 0)) + P(X \in [0, x]) \\ &= 0 + |[0, x]|/4 = x/4. \end{aligned}$$

Τέλος, όταν $4 < x$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X \le x) &= P(X < 0) + P(0 \le X \le 4) + P(4 < X \le x) \\ &= P(X \in (-\infty, 0)) + P(X \in [0, 4]) + P(X \in (4, x]) \\ &= 0 + |[0, 4]|/4 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Άρα

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0 \\ x/4, & 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & 4 \leq x < +\infty \end{cases}$$

Τώρα, αν θεωρήσουμε την παράγωγο f_X της F_X στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$, $(4, +\infty)$ στα οποία αυτή παραγωγίζεται, έχουμε

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1/4, & 0 < x < 4 \\ 0, & 4 < x < +\infty \end{cases}$$

Ελέγχουμε εύκολα ότι ισχύει

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \qquad \text{για κάθε } x \in (-\infty, +\infty),$$

διακρίνοντας πάλι περιπτώσεις: $-\infty < x \leq 0$, $0 \leq x \leq 4$, $4 \leq x < +\infty$. (Η συνάρτηση f_X δεν χρειάζεται να ορίζεται σε μεμονωμένα σημεία, αφού δεν επηρεάζεται ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων της f_X.)
Άρα η X είναι συνεχής τ.μ. και

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \frac{1}{4} \int_0^4 x\, dx = 2.$$

17. *Ένας παίκτης ρίχνει διαδοχικά ένα νόμισμα το οποίο δείχνει Κ με πιθανότητα p και Γ με πιθανότητα $1 - p$. Ο παίκτης σταματά την πρώτη φορά που το νόμισμα θα δείξει Κ: αν αυτό συμβεί στην n ρίψη ο παίκτης κερδίζει x_n ευρώ. Βρείτε το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη στις εξής περιπτώσεις: (i) $x_n = n$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$. (ii) $x_n = a^{n-1}$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$, όπου $0 < a < 1/(1-p)$.*

Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι το κέρδος του παίκτη, τότε οι πιθανές τιμές της X είναι οι $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Το ενδεχόμενο $X = x_n$ έχει πιθανότητα

$$f_X(x_n) = P(X = x_n) = p(1-p)^{n-1}.$$

Άρα το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη είναι

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n f_X(x_n) = p \sum_{n=1}^{+\infty} x_n (1-p)^{n-1}.$$

(i) Αν $x_n = n$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$, τότε

$$\mathbb{E}(X) = p \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}.$$

Γνωρίζουμε ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ όταν $-1 < x < 1$. Παραγωγίζοντας τις δύο μεριές της ταυτότητας, έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Άρα με $x = 1 - p$ βρίσκουμε ότι

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

(ii) Αν $x_n = a^{n-1}$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$, τότε

$$\mathbb{E}(X) = p \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} (a(1-p))^{n-1}.$$

Από την $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ όταν $-1 < x < 1$, με $x = a(1-p)$, βρίσκουμε ότι

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p}{1 - a(1-p)}.$$

18. *Έστω ότι σε δέκα ρίψεις ενός μη αμερόληπτου νομίσματος η πιθανότητα να εμφανιστεί πέντε φορές Κ είναι διπλάσια της πιθανότητας να εμφανιστεί τέσσερις φορές Κ. Βρείτε την πιθανότητα να εμφανιστεί μία τουλάχιστον φορά Κ σε πέντε ρίψεις του νομίσματος.*

    Έστω p η πιθανότητα να εμφανιστεί Κ και $1-p$ η πιθανότητα να εμφανιστεί Γ.
    Η πιθανότητα να εμφανιστεί πέντε φορές Κ στις δέκα ρίψεις είναι

    $$\binom{10}{5} p^5 (1-p)^5.$$

    Η πιθανότητα να εμφανιστεί τέσσερις φορές Κ στις δέκα ρίψεις είναι

    $$\binom{10}{4} p^4 (1-p)^6.$$

    Από την σχέση
    $$\binom{10}{5} p^5 (1-p)^5 = 2\binom{10}{4} p^4 (1-p)^6$$
    προκύπτει $p = 5/8$. Άρα η πιθανότητα να εμφανιστεί καμία φορά Κ σε πέντε ρίψεις είναι $(3/8)^5$ και άρα η πιθανότητα που ζητάμε είναι $1 - (3/8)^5$.

19. *Μια μηχανή παράγει βίδες από τις οποίες είναι ελαττωματικές κατά μέσο όρο το 1%. Να υπολογισθεί η πιθανότητα σε ένα κιβώτιο εκατό βιδών να υπάρχει το πολύ μία ελαττωματική με δύο τρόπους: (i) να βρεθεί η ακριβής τιμή της πιθανότητας, (ii) προσεγγίζοντας με την κατανομή Poisson.*

    Η πιθανότητα να είναι μία βίδα ελαττωματική είναι $1/100$.
    (i) Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι το πλήθος των ελαττωματικών βιδών στις 100, τότε η X ακολουθεί την δυωνυμική κατανομή με

    $$P(X = k) = \binom{100}{k} \Big(\frac{1}{100}\Big)^k \Big(\frac{99}{100}\Big)^{100-k}.$$

    Άρα η πιθανότητα να υπάρχει το πολύ μία ελαττωματική βίδα είναι

    $$P(X=0) + P(X=1) = \Big(\frac{99}{100}\Big)^{100} + 100\,\frac{1}{100}\Big(\frac{99}{100}\Big)^{99} = \Big(\frac{99}{100}\Big)^{100} + \Big(\frac{99}{100}\Big)^{99}.$$

    (ii) Επειδή η εμφάνιση ελαττωματικής βίδας είναι σπάνιο γεγονός με *μία* αναμενόμενη ελαττωματική βίδα στις εκατό, μπορούμε να προσεγγίσουμε την τυχαία μεταβλητή X με τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 1$. Δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε (με πολύ καλή προσέγγιση) ότι

    $$P(X = k) = e^{-1}\frac{1^k}{k!}.$$

    Άρα η πιθανότητα να υπάρχει το πολύ μία ελαττωματική βίδα είναι

    $$P(X=0) + P(X=1) = e^{-1}\Big(\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!}\Big) = \frac{2}{e}.$$

20. *Σε μια αεροπορική πτήση με αεροπλάνο ογδόντα θέσεων δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση κατά μέσο όρο τέσσερις από όσους έχουν κάνει κράτηση. Ποιά είναι η πιθανότητα να ταξιδέψει κάποιος που βρίσκεται στην πέμπτη θέση του καταλόγου αναμονής;*

Το να μην εμφανιστούν τέσσερα από τα ογδόντα άτομα που έχουν κάνει κράτηση είναι σπάνιο γεγονός. Άρα αν η τυχαία μεταβλητή X είναι το πλήθος των ατόμων που δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση του αεροπλάνου ογδόντα θέσεων, μπορούμε να θεωρήσουμε (με πολύ καλή προέγγιση) ότι η X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 4$. Δηλαδή

$$P(X = k) = e^{-4}\frac{4^k}{k!}.$$

Για να ταξιδέψει κάποιος που βρίσκεται στην πέμπτη θέση του καταλόγου αναμονής πρέπει να συμβεί το ενδεχόμενο $X \geq 5$. Η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου είναι

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - e^{-4}\Big(1 + \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!}\Big) \approx 0,3711.$$

Η πιθανότητα είναι σχετικά μεγάλη και άρα αξίζει να κάνει τον κόπο ο πέμπτος στην σειρά αναμονής να εμφανιστεί στο αεροδρόμιο.

21. *Σε ένα εργοστάσιο κατά μέσο όρο τρεις από τις εκατό μηχανές του παρουσιάζουν βλάβη σε μία ημέρα. Κάθε μηχανή που παρουσιάζει βλάβη απαιτεί εργασία μίας ημέρας ενός μηχανικού για την επισκευή της. Πόσους μηχανικούς πρέπει να προσλάβει το εργοστάσιο ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον $0,95$ να υπάρχει διαθέσιμος μηχανικός όταν μια μηχανή παρουσιάσει βλάβη;*

Το να χαλάσουν τρεις από τις εκατό μηχανές σε μία ημέρα είναι σπάνιο γεγονός. Άρα αν η τυχαία μεταβλητή X είναι το πλήθος των μηχανών που χαλούν σε μία ημέρα, μπορούμε να θεωρήσουμε (με πολύ καλή προέγγιση) ότι η X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 3$. Δηλαδή

$$P(X = k) = e^{-3}\frac{3^k}{k!}.$$

Άς υποθέσουμε ότι το εργοστάσιο απασχολεί m μηχανικούς. Για να υπάρχει διαθέσιμος μηχανικός για κάθε μηχανή που χαλά, πρέπει να χαλάσουν το πολύ m μηχανές. Άρα θέλουμε να βρούμε τον αριθμό m ώστε η πιθανότητα $P(X \leq m)$ να είναι $\geq 0,95$. Δηλαδή,

$$e^{-3}\Big(1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \cdots + \frac{3^m}{m!}\Big) \geq 0,95.$$

(Κάνοντας προσεγγίσεις, βρίσκουμε $m = 6$ ως τον ελάχιστο αριθμό μηχανικών που πρέπει να προσλάβει το εργοστάσιο. Για $m = 5$ η παράσταση αριστερά έχει τιμή $< 0,95$.)