Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Λύσεις του πρώτου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. (i) *Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε επιτροπή k ατόμων από n άτομα;*
Πρόκειται για τους συνδυασμούς n ατόμων ανά k. Δηλαδή $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
(ii) *Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε επιτροπή k ατόμων από n άτομα όταν τα άτομα στην επιτροπή έχουν συγκεκριμένες αρμοδιότητες (πρόεδρος, ταμίας κλπ);*
Επιλέγουμε k άτομα, αλλά μας ενδιαφέρει η διάταξή τους (πρόεδρος, ταμίας κλπ). Άρα πρόκειται για τις διατάξεις n ατόμων ανά k. Δηλαδή $(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

2. (i) *Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε k παπούτσια από n ($n \geq k$) διαφορετικά ζευγάρια παπουτσιών;*
Τα $2n$ παπούτσια είναι διαφορετικά. Άρα πρόκειται για τους συνδυασμούς $2n$ παπουτσιών ανά k. Δηλαδή $\binom{2n}{k}$.
(ii) *Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε k παπούτσια από n ($n \geq k$) διαφορετικά ζευγάρια παπουτσιών ώστε να έχουμε τουλάχιστον ένα ζευγάρι; Τουλάχιστον δύο ζευγάρια;*
Για το πρώτο ερώτημα, το πιο απλό είναι να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τα k παπούτσια ώστε να μην προκύψει *κανένα* ζευγάρι και μετά να αφαιρέσουμε τον αριθμό που θα βρούμε από τον συνολικό αριθμό που βρήκαμε στο ερώτημα (i). Για να μην προκύψει κανένα ζευγάρι, επιλέγουμε k από τα n ζευγάρια με $\binom{n}{k}$ τρόπους, και για κάθε τέτοια επιλογή παίρνουμε ένα μόνο παπούτσι από καθένα από τα k ζευγάρια. Σε καθένα από τα k ζευγάρια μπορούμε να κάνουμε επιλογή από "αριστερό" ή "δεξιό". Άρα για καθένα από τους $\binom{n}{k}$ τρόπους επιλογής k ζευγαριών έχουμε 2^k τρόπους επιλογής ενός παπουτσιού από καθένα από τα k ζευγάρια. Άρα έχουμε $2^k\binom{n}{k}$ τρόπους επιλογής k παπουτσιών ώστε να μην σχηματιστεί κανένα ζευγάρι. Άρα η απάντηση είναι $\binom{2n}{k} - 2^k\binom{n}{k}$.
Για το δεύτερο ερώτημα, θα αφαιρέσουμε από τον αριθμό που βρήκαμε στο πρώτο ερώτημα και τους τρόπους επιλογής k παπουτσιών ώστε να προκύψει *ακριβώς ένα* ζευγάρι. Για να προκύψει ακριβώς ένα ζευγάρι, επιλέγουμε πρώτα εκείνο το ζευγάρι, από το οποίο θα πάρουμε και τα δύο παπούτσια του, με n τρόπους και κατόπιν, για κάθε τέτοιο ζευγάρι που επιλέγουμε στην αρχή, επιλέγουμε από τα $n-1$ που απέμειναν $k-2$ παπούτσια ώστε να μην σχηματιστεί κανένα ζευγάρι. Όπως είδαμε πριν, αυτό γίνεται με $2^{k-2}\binom{n-1}{k-2}$ τρόπους. Άρα έχουμε $n2^{k-2}\binom{n-1}{k-2}$ τρόπους επιλογής k παπουτσιών ώστε να προκύψει ακριβώς ένα ζευγάρι. Άρα η απάντηση είναι $\binom{2n}{k} - 2^k\binom{n}{k} - n2^{k-2}\binom{n-1}{k-2}$.

3. *Έστω $k, m, n \in \mathbb{N}$, $k + m \leq n$.*
(i) *Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε και να κρατήσουμε για τον εαυτό μας δυο ξένα υποσύνολα k στοιχείων και m στοιχείων ενός συνόλου n στοιχείων;*
Επιλέγουμε πρώτα το υποσύνολο με τα k στοιχεία με $\binom{n}{k}$ τρόπους και μετά, για καθέναν από τους τρόπους επιλογής του υποσυνόλου των k στοιχείων, επιλέγουμε το υποσύνολο με τα m στοιχεία από τα $n-k$ που απέμειναν με $\binom{n-k}{m}$ τρόπους. Άρα η απάντηση είναι $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{m!(n-k-m)!} = \frac{n!}{k!m!(n-k-m)!} = \binom{n}{k,m,n-k-m}$.
(ii) *Ποιά είναι η απάντηση στο προηγούμενο αν δεν απαιτήσουμε τα δυο υποσύνολα να είναι ξένα;*
Η απάντηση είναι όπως στο ερώτημα (i), μόνο που στην επιλογή του δεύτερου υποσυνόλου με τα m στοιχεία δεν χρειάζεται να αποκλείσουμε τα k στοιχεία που επιλέξαμε για το πρώτο υποσύνολο. Άρα έχουμε $\binom{n}{k}$ τρόπους επιλογής του πρώτου υποσυνόλου και, για καθέναν από αυτούς τους τρόπους, έχουμε $\binom{n}{m}$ τρόπους επιλογής του δεύτερου υποσυνόλου. Άρα έχουμε $\binom{n}{k}\binom{n}{m}$ τρόπους. Αυτή είναι η σωστή απάντηση στην περίπτωση $k \neq m$. Στην περίπτωση $k = m$ πρέπει να προσέξουμε παραπάνω. Μπορούμε να επιλέξουμε το υποσύνολο A ως πρώτο και το υποσύνολο B ως δεύτερο αλλά και το υποσύνολο B ως

πρώτο και το υποσύνολο A ως δεύτερο. Αυτές οι δύο επιλογές είναι ουσιαστικά η ίδια επιλογή (επειδή κρατάμε εμείς και τα δύο υποσύνολα). Δηλαδή δεν πρέπει να διπλομετρήσουμε τα ζευγάρια (A, B), (B, A) στην περίπτωση $A \neq B$. Κάνουμε λοιπόν το μέτρημα ως εξής. Έχουμε συνολικά $\binom{n}{k}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2$ ζευγάρια. Μετράμε τον αριθμό $\binom{n}{k}$ των ζευγαριών (A, A) (που δεν υπάρχει κίνδυνος να διπλομετρήσουμε) και προσθέτουμε το υπόλοιπο $\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k}$ αφού το διαιρέσουμε με το 2. Άρα στην περίπωση $k = m$ η απάντηση είναι $\binom{n}{k} + \frac{1}{2}(\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k}) = \frac{1}{2}\binom{n}{k}^2 + \frac{1}{2}\binom{n}{k}$.

(iii) *Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε και να δώσουμε, ένα στην Ρένα και ένα στην Ουρανία, δυο ξένα υποσύνολα k στοιχείων και m στοιχείων ενός συνόλου n στοιχείων;*

Η απάντηση είναι όπως στο ερώτημα (i) μόνο που τα δύο υποσύνολα A, B που επιλέξαμε πρέπει να τα δώσουμε στην Ρένα και στην Ουρανία είτε ως (A, B) είτε ως (B, A). Άρα για καθέναν τρόπο επιλογής των A, B έχουμε δύο τρόπους να τα δώσουμε στις δύο κοπέλες. Άρα η απάντηση είναι $2\binom{n}{k}\binom{n-k}{m}$.

(iv) *Ποιά είναι η απάντηση στο προηγούμενο αν δεν απαιτήσουμε τα δυο υποσύνολα να είναι ξένα;*

Όπως στο ερώτημα (iii), έχουμε $2\binom{n}{k}\binom{n}{m}$ τρόπους επιλογής και μοιράσματος στις δύο κοπέλες, επειδή για το δεύτερο υποσύνολο δεν χρειάζεται να αποκλείσουμε από τα n στοιχεία τα k που επιλέξαμε για το πρώτο υποσύνολο. Αυτή είναι η σωστή απάντηση στην περίπτωση $k \neq m$, αλλά όχι στην περίπτωση $k = m$. Αν $k = m$, μπορούμε να επιλέξουμε το υποσύνολο A ως πρώτο και το υποσύνολο B ως δεύτερο αλλά και ανάποδα, δηλαδή να έχουμε το ζευγάρι (A, B) αλλά και το ζευγάρι (B, A). Θα μετρήσουμε και τα δύο ζευγάρια, διότι αντιστοιχούν σε δύο τρόπους μοιράσματός στις δύο κοπέλες. Άρα θα μετρήσουμε όλα τα ζευγάρια (A, B) που σχηματίζονται επιλέγοντας ένα υποσύνολο A με $\binom{n}{k}$ τρόπους και ένα υποσύνολο B με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Άρα στην περίπτωση $k = m$ η απάντηση είναι $\binom{n}{k}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2$.

4. *Έστω $k, m, n \in \mathbb{N}$, $k + m \leq n$. Με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε και να κρατήσουμε για τον εαυτό μας δυο διανύσματα k συντεταγμένων και m συντεταγμένων από τα στοιχεία ενός συνόλου n αριθμών, απαιτώντας τα δυο διανύσματα να μην έχουν κοινές συντεταγμένες;*

   Έχουμε το ίδιο ερώτημα με το (i) της άσκησης 3, μόνο που τα στοιχεία που επιλέγουμε πρέπει να είναι διατεταγμένα. Άρα η απάντηση είναι $(n)_k(n-k)_m = \frac{n!}{(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(n-k-m)!} = \frac{n!}{(n-k-m)!} = (n)_{k+m}$.

5. *Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάψουμε n αριθμημένες μπάλες με k χρώματα; Βρείτε δύο διαφορετικούς τύπους που οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα.*

   Πρόκειται για τις διατάξεις k χρωμάτων ανά n με επανάληψη. Την πρώτη μπάλα μπορούμε να την βάψουμε με k τρόπους, την δεύτερη μπάλα πάλι με k τρόπους κλπ. Άρα η απάντηση είναι $k \cdots k = k^n$.

   Υπάρχει, όμως, και δεύτερος τρόπος.

   Θεωρούμε k μη-αρνητικούς ακέραιους $p_1, \ldots, p_k$ με άθροισμα n. Κατόπιν, βάφουμε p_1 μπάλες με το πρώτο χρώμα, p_2 μπάλες με το δεύτερο χρώμα κλπ. Με πόσους τρόπους μπορούμε να το κάνουμε αυτό (με δεδομένους τους αριθμούς $p_1, \ldots, p_k$); Επιλέγουμε p_1 μπάλες από τις n με $\binom{n}{p_1}$ τρόπους, για καθέναν από αυτούς τους $\binom{n}{p_1}$ τρόπους επιλέγουμε p_2 μπάλες από τις $n - p_1$ που απέμειναν με $\binom{n-p_1}{p_2}$ τρόπους, για καθέναν από τους $\binom{n}{p_1}\binom{n-p_1}{p_2}$ τρόπους να επιλέξουμε τις πρώτες $p_1 + p_2$ μπάλες επιλέγουμε p_3 μπάλες από τις $n - p_1 - p_2$ που απέμειναν με $\binom{n-p_1-p_2}{p_3}$ τρόπους κλπ. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{p_1}\binom{n-p_1}{p_2}\cdots\binom{n-p_1-\cdots-p_{n-2}}{p_{n-1}}\binom{n-p_1-\cdots-p_{n-2}-p_{n-1}}{p_n}\\
&\quad=\frac{n!}{p_1!(n-p_1)!}\,\frac{(n-p_1)!}{p_2!(n-p_1-p_2)!}\cdots\\
&\quad\quad\cdots\frac{(n-p_1-\cdots-p_{n-2})!}{p_{n-1}!(n-p_1-\cdots-p_{n-2}-p_{n-1})!}\,\frac{(n-p_1-\cdots-p_{n-2}-p_{n-1})!}{p_n!(n-p_1-\cdots-p_{n-1}-p_n)!}\\
&\quad=\frac{n!}{p_1!\cdots p_n!}=\binom{n}{p_1,\ldots,p_k}
\end{aligned}$$

τρόπους να βάψουμε p_1 μπάλες με το πρώτο χρώμα, p_2 μπάλες με το δεύτερο χρώμα κλπ. Αυτό συμβαίνει για κάθε επιλογή k μη-αρνητικών ακεραίων $p_1,\ldots,p_k$ με άθροισμα n. Άρα οι συνολικοί τρόποι είναι το άθροισμα αυτών που βρήκαμε ως προς όλες τις επιλογές k μη-αρνητικών ακεραίων $p_1,\ldots,p_k$ με άθροισμα n. Άρα η απάντηση είναι

$$\sum_{p_1+\cdots+p_k=n}\binom{n}{p_1,\ldots,p_k}.$$

Επειδή οι δύο τρόποι απάντησης πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, έχουμε ότι

$$k^n=\sum_{p_1+\cdots+p_k=n}\binom{n}{p_1,\ldots,p_k}.$$

Σε συνδυασμό με το προηγούμενο, εξηγήστε την γενίκευση του δυωνυμικού τύπου του Newton:

$$(x_1+\cdots+x_k)^n=\sum_{p_1+\cdots+p_k=n}\binom{n}{p_1,\ldots,p_k}x_1^{p_1}\cdots x_k^{p_k}. \tag{1}$$

Όταν πολλαπλασιάζουμε n παρενθέσεις $(x_1+\cdots+x_k)\cdots(x_1+\cdots+x_k)$ παίρνουμε έναν όρο από την πρώτη, έναν από την δεύτερη κλπ, και τους πολλαπλασιάζουμε. Αυτό το κάνουμε με όλους τους δυνατούς τρόπους και μετά αθροίζουμε τα γινόμενα. Καθε προσθετέος είναι ένα γινόμενο $x_1^{p_1}\cdots x_k^{p_k}$, το οποίο προκύπτει αν από p_1 παρενθέσεις επιλέξουμε το x_1, από p_2 παρενθέσεις επιλέξουμε το x_2 κλπ. Οι $p_1,\ldots,p_k$ είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι με άθροισμα n, όσες οι παρενθέσεις. Η κατάσταση είναι ίδια με την προηγούμενη με τα χρώματα: αν τα $x_1,\ldots,x_k$ αντιστοιχούν σε k χρώματα, το να επιλέξουμε από p_1 παρενθέσεις το x_1, από p_2 παρενθέσεις το x_2 κλπ. είναι το ίδιο με το βάψουμε p_1 παρενθέσεις με το πρώτο χρώμα, p_2 παρενθέσεις με το δεύτερο χρώμα κλπ. Άρα, όπως είδαμε στην προηγούμενη κατάσταση, υπάρχουν

$$\frac{n!}{p_1!\cdots p_n!}=\binom{n}{p_1,\ldots,p_k}$$

τρόποι να εμφανιστεί το γινόμενο $x_1^{p_1}\cdots x_k^{p_k}$ ανάμεσα σε όλα τα δυνατά γινόμενα. Προσθέτοντας όλα τα γινόμενα προκύπτει το γινόμενο $(x_1+\cdots+x_k)^n$ των n παρενθέσεων . Άρα προκύπτει ο τύπος (1).