Θεωρία Πιθανοτήτων, εαρινό εξάμηνο 2017-18.

Λύσεις του πέμπτου φυλλαδίου ασκήσεων.

1. *Σε ένα πρόβλημα πολλαπλής επιλογής προτείνονται n απαντήσεις από τις οποίες μόνο μία είναι σωστή. Αν η σωστή απάντηση κερδίζει μία μονάδα, πόση πρέπει να είναι η αρνητική βαθμολογία κάθε λάθος απάντησης ώστε το αναμενόμενο κέρδος του φοιτητή που επιλέγει στην τύχη να είναι ίσο με 0;*
Έστω $-x$ η αρνητική βαθμολογία κάθε λάθος απάντησης. Το κέρδος X του φοιτητή είναι μια τυχαία μεταβλητή, η οποία έχει δύο τιμές: $X = 1$ όταν ο φοιτητής επιλέγει την σωστή απάντηση, δηλαδή με πιθανότητα $\frac{1}{n}$, και $X = -x$ όταν ο φοιτητής επιλέγει την λάθος απάντηση, δηλαδή με πιθανότητα $\frac{n-1}{n}$. Δηλαδή:
$$f_X(1) = P(X = 1) = \frac{1}{n}, \qquad f_X(-x) = P(X = -x) = \frac{n-1}{n}.$$
Άρα το αναμενόμενο κέρδος του φοιτητή είναι
$$\mathbb{E}(X) = 1 f_X(1) + (-x) f_X(-x) = \frac{1}{n} - x\,\frac{n-1}{n}.$$
Η εξίσωση $\mathbb{E}(X) = 0$ έχει λύση $x = \frac{1}{n-1}$.

2. *Έστω ότι ένας παίκτης ρίχνει διαδοχικά ένα αμερόληπτο νόμισμα. Στην n ρίψη στοιχηματίζει 2^{n-1} ευρώ ότι θα προκύψει Κ, για κάθε $n = 1, \dots, N$. (Αν προκύψει Κ ο παίκτης κερδίζει 2^{n-1} ευρώ ενώ αν προκύψει Γ χάνει 2^{n-1} ευρώ.) Το παιχνίδι σταματά την πρώτη φορά που θα προκύψει Κ ή όταν ολοκληρωθεί η N ρίψη, ανεξάρτητα από το αποτέλεσμά της. Ποιό είναι το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη;*
Στην πρώτη ρίψη ο παίκτης είτε κερδίζει $2^{1-1} = 1$ ευρώ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και σταματά το παιχνίδι είτε κερδίζει $-2^{1-1} = -1$ ευρώ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και συνεχίζει το παιχνίδι. Στην δεύτερη ρίψη είτε κερδίζει $2^{2-1} = 2$ ευρώ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και σταματά το παιχνίδι με συνολικό κέρδος μέχρι εκείνη τη στιγμή ίσο με $2 - 1 = 1$ ευρώ είτε κερδίζει $-2^{2-1} = -2$ ευρώ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και συνεχίζει το παιχνίδι με συνολικό κέρδος μέχρι εκείνη τη στιγμή ίσο με $-1-2 = -3$ ευρώ. Στην τρίτη ρίψη είτε κερδίζει $2^{3-1} = 4$ ευρώ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και σταματά το παιχνίδι με συνολικό κέρδος μέχρι εκείνη τη στιγμή ίσο με $4 - 1 - 2 = 1$ ευρώ είτε κερδίζει $-2^{3-1} = -4$ ευρώ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και συνεχίζει το παιχνίδι με συνολικό κέρδος μέχρι εκείνη τη στιγμή ίσο με $-1 - 2 - 4 = -7$ ευρώ.
Γενικότερα, στην n ρίψη ο παίκτης είτε κερδίζει 2^{n-1} ευρώ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και σταματά το παιχνίδι με συνολικό κέρδος μέχρι εκείνη τη στιγμή ίσο με
$$2^{n-1} - 1 - 2 - 2^2 - \cdots - 2^{n-2} = 2^{n-1} - (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}) = 2^{n-1} - \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 1$$
ευρώ είτε κερδίζει -2^{n-1} ευρώ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και συνολικό κέρδος μέχρι εκείνη τη στιγμή ίσο με
$$-1 - 2 - 2^2 - \cdots - 2^{n-2} - 2^{n-1} = -\frac{2^n - 1}{2 - 1} = -2^n + 1$$
ευρώ. Τώρα, αν $n < N$, ο παίκτης συνεχίζει με την επόμενη ρίψη ενώ, αν $n = N$, το παιχνίδι σταματά.
Άρα το συνολικό κέρδος X του παίκτη είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία έχει δύο τιμές: $X = 1$ κάθε φορά που ο παίκτης κερδίζει και συγχρόνως σταματά το παιχνίδι (δηλαδή μέχρι και την N ρίψη) και $X = -2^N + 1$ όταν ο παίκτης χάσει στην N ρίψη. Η πιθανότητα να συμβεί το τελευταίο ενδεχόμενο είναι ίση με την πιθανότητα να αποτύχει ο παίκτης σε όλες

τις N ρίψεις του νομίσματος, δηλαδή ίση με $(\frac{1}{2})^N$. Άρα η πιθανότητα να συμβεί το πρώτο ενδεχόμενο είναι $1 - (\frac{1}{2})^N$. Δηλαδή,

$$f_X(1) = P(X = 1) = 1 - \frac{1}{2^N}, \qquad f_X(-2^N + 1) = P(X = -2^N + 1) = \frac{1}{2^N}.$$

Άρα το αναμενόμενο συνολικό κέρδος του παίκτη είναι

$$\mathbb{E}(X) = 1 f_X(1) + (-2^N + 1) f_X(-2^N + 1) = 1\left(1 - \frac{1}{2^N}\right) + (-2^N + 1)\frac{1}{2^N} = 0.$$

3. *Ένα σωμάτιο κινείται πάνω σε συγκεκριμένη ευθεία. Κάθε χρονική στιγμή $t = 1, 2, 3, \ldots$ κάνει βήμα $+1$ (δεξιά) με πιθανότητα p ή βήμα -1 (αριστερά) με πιθανότητα $1 - p$. Η θέση του την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι στο σημείο 0. Έστω X_n η θέση του σωματίου την χρονική στιγμή n. Αποδείξτε ότι η τ.μ. $Y_n = (X_n + n)/2$ είναι δ.τ.μ. η οποία ακολουθεί την δυωνυμική κατανομή και βάσει αυτού βρείτε την $\mathbb{E}(X_n)$ και την $\mathrm{Var}(X_n)$.*

   Την χρονική στιγμή n το σωμάτιο θα έχει κάνει συνολικά n κινήσεις: κάθε μία από αυτές τις κινήσεις θα είναι είτε $+1$ είτε -1. Αν k κινήσεις από τις n είναι $+1$ και οι υπόλοιπες $n - k$ είναι -1, τότε το σωμάτιο θσ βρεθεί στην θέση

$$X_n = k(+1) + (n - k)(-1) = 2k - n$$

   σε σχέση με την θέση 0 που είχε πριν ξεκινήσει τις οποιεσδήποτε κινήσεις. Το αποτέλεσμα $X_n = 2k - n$ είναι ίδιο ανεξάρτητα από την σειρά με την οποία κάνει τις k κινήσεις $+1$ και τις $n - k$ κινήσεις -1. Τώρα, η πιθανότητα να κάνει το σωμάτιο k κινήσεις $+1$ και $n - k$ κινήσεις -1 είναι ίση με $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. Άρα η τυχαία μεταβλητή X_n έχει τιμή $2k - n$ με αντίστοιχη πιθανότητα $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, όπου το k μπορεί να πάρει τις τιμές $0, 1, \ldots, n$. Όταν η τ.μ. X_n έχει την τιμή $2k - n$ η τ.μ. $Y_n = \frac{X_n + n}{2}$ έχει την τιμή k. Επομένως, η τ.μ. Y_n έχει τιμή k με αντίστοιχη πιθανότητα $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, όπου το k μπορεί να πάρει τις τιμές $0, 1, \ldots, n$. Δηλαδή, η τ.μ. Y_n ακολουθεί την δυωνυμική κατανομή $\mathcal{B}(n, p)$ και άρα

$$\mathbb{E}(Y_n) = np, \qquad \mathrm{Var}(Y_n) = np(1 - p).$$

   Επειδή $X_n = 2Y_n - n$, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(X_n) = 2\mathbb{E}(Y_n) - n = 2np - n, \qquad \mathrm{Var}(X_n) = 4\,\mathrm{Var}(Y_n) = 4np(1 - p).$$

4. *Αν η πιθανότητα επιτυχούς βολής κατά στόχου είναι $0,3$, να υπολογίσετε τον αριθμό των βολών που απαιτούνται ώστε η πιθανότητα να χτυπηθεί ο στόχος τουλάχιστον μία φορά να είναι τουλάχιστον $0,9$.*

   Αν n είναι ο αριθμός των βολών, η πιθανότητα να χτυπηθεί ο στόχος καμία φορά είναι $(0,7)^n$ και άρα η πιθανότητα να χτυπηθεί ο στόχος τουλάχιστον μία φορά είναι $1 - (0,7)^n$. Άρα θέλουμε να ισχύει η ανισότητα

$$1 - (0,7)^n \geq 0,9.$$

   Ισοδύναμα: $(\frac{7}{10})^n \leq \frac{1}{10}$. Οι τιμές του $(\frac{7}{10})^n$ μικραίνουν όταν μεγαλώνει το n. Δηλαδή

$$\frac{7}{10} > \left(\frac{7}{10}\right)^2 > \left(\frac{7}{10}\right)^3 > \ldots$$

   και το πρώτο n για το οποίο έχουμε $(\frac{7}{10})^n \leq \frac{1}{10}$ είναι το $n = 7$.

5. *Σε ένα βιβλίο 800 σελίδων περιέχονται 40 τυπογραφικά λάθη τυχαία κατανεμημένα. Προσεγγίζοντας με την κατανομή Poisson, να υπολογίσετε την πιθανότητα μία τυχαία σελίδα του βιβλίου να περιέχει n λάθη. Ποιά είναι η πιθανότητα από 10 σελίδες τυχαία επιλεγμένες να*

υπάρχουν ακριβώς 3 χωρίς λάθος;
Σε μια σελίδα του βιβλίου υπάρχουν κατά μέσο όρο $\frac{40}{800} = 0,05$ λάθη. Δηλαδή ο αριθμός X των λαθών σε μία σελίδα ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 0,05$. Άρα η πιθανότητα να υπάρχουν n λάθη σε μια σελίδα είναι

$$f_X(n) = P(X = n) = e^{-0,05}\,\frac{(0,05)^n}{n!}.$$

Άρα η πιθανότητα να υπάρχουν 0 λάθη σε μία σελίδα είναι

$$P(X = 0) = e^{-0,05}\frac{(0,05)^0}{0!} = e^{-0,05}.$$

Αν τώρα έχουμε δέκα σελίδες, η πιθανότητα να έχουν ακριβώς τρεις από αυτές 0 λάθη είναι

$$\binom{10}{3}(e^{-0,05})^3(1 - e^{-0,05})^7.$$

6. *Έστω ότι οι ανεξάρτητες δ.τ.μ. X_1 και X_2 ακολουθούν την κατανομή Poisson με παραμέτρους λ_1 και λ_2, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι η δ.τ.μ. $X_1 + X_2$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_1 + \lambda_2$.*
Η X_1 έχει τιμές $n = 0, 1, 2, \ldots$ με αντίστοιχες πιθανότητες $P(X_1 = n) = e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^n}{n!}$. Ομοίως, η X_2 έχει τιμές $n = 0, 1, 2, \ldots$ με αντίστοιχες πιθανότητες $P(X_2 = n) = e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^n}{n!}$. Τώρα, οι τιμές της $X = X_1 + X_2$ είναι τα αθροίσματα των τιμών των X_1, X_2 και άρα είναι πάλι οι τιμές $n = 0, 1, 2, \ldots$. Για να έχει η $X = X_1 + X_2$ την τιμή n πρέπει η X_1 να έχει τιμή m και η X_2 να έχει τιμή $n - m$, όπου $m = 0, 1, \ldots, n-1, n$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \sum_{m=0}^{n} P(X_1 = m, X_2 = n - m) = \sum_{m=0}^{n} P(X_1 = m)P(X_2 = n - m) \\ &= \sum_{m=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^m}{m!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-m}}{(n-m)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!(n-m)!}\,\lambda_1^m\lambda_2^{n-m} \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\lambda_1^m\lambda_2^{n-m} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Άρα η X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_1 + \lambda_2$.

7. *Έχει διαπιστωθεί ότι $0,1\%$ του πληθυσμού εμπλέκεται σε ένα τουλάχιστον δυστύχημα κάθε χρόνο. Μία ασφαλιστική εταιρεία έχει πέντε χιλιάδες πελάτες. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες (i) το πολύ τρεις πελάτες να εμπλακούν σε δυστύχημα τον επόμενο χρόνο, (ii) το πολύ δύο πελάτες να εμπλακούν σε δυστύχημα σε κάθε ένα από τα επόμενα δύο χρόνια, (iii) το πολύ τέσσερις πελάτες να εμπλακούν σε δυστύχημα τα επόμενα δύο χρόνια. Για το (iii) είναι βολικό να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα της άσκησης 6.*
Ο πληθυσμός που ενδιαφέρει την ασφαλιστική εταιρεία είναι οι πέντε χιλιάδες πελάτες της και από αυτούς το $0,1\%$ αναμένεται να εμπλακεί σε ένα τουλάχιστον ατύχημα τον χρόνο. Δηλαδή, πέντε πελάτες κατά μέσο όρο εμπλέκονται σε ένα τουλάχιστον ατύχημα τον χρόνο. Άρα ο αριθμός X των πελατών που εμπλέκονται σε ένα τουλάχιστον ατύχημα τον χρόνο είναι τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 5$, οπότε $P(X = n) = e^{-5}\frac{5^n}{n!}$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$.
(i) Η πιθανότητα το πολύ τρεις πελάτες να εμπλακούν σε δυστύχημα μια χρονιά είναι

$$P(X \leq 3) = e^{-5} + e^{-5}\frac{5}{1!} + e^{-5}\frac{5^2}{2!} + e^{-5}\frac{5^3}{3!} = e^{-5}\Big(1 + \frac{5}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!}\Big).$$

(ii) Η πιθανότητα το πολύ δύο πελάτες να εμπλακούν σε δυστύχημα μια οποιαδήποτε χρονιά είναι

$$P(X \le 2) = e^{-5} + e^{-5}\frac{5}{1!} + e^{-5}\frac{5^2}{2!} = e^{-5}\Big(1 + \frac{5}{1!} + \frac{5^2}{2!}\Big).$$

Αυτό ισχύει για την επόμενη χρονιά καθώς και για την μεθεπόμενη χρονιά. Άρα η πιθανότητα να συμβούν και τα δύο αυτά *ανεξάρτητα* ενδεχόμενα είναι ίση με το γινόμενο των δύο πιθανοτήτων, δηλαδή

$$e^{-10}\Big(1 + \frac{5}{1!} + \frac{5^2}{2!}\Big)^2.$$

(iii) Αν X_1 είναι ο αριθμός των πελατών που θα εμπλακούν σε δυστύχημα τον επόμενο χρόνο και X_2 είναι ο αριθμός των πελατών που θα εμπλακούν σε δυστύχημα τον μεθεπόμενο χρόνο, τότε $X = X_1 + X_2$ είναι ο αριθμός των πελατών που θα εμπλακούν σε δυστύχημα τα επόμενα δύο χρόνια. Οι τ.μ. X_1, X_2 ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 5$. Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 5 + 5 = 10$. Άρα η πιθανότητα το πολύ τέσσερις πελάτες να εμπλακούν σε δυστύχημα τα επόμενα δύο χρόνια είναι

$$P(X \le 4) = e^{-10}\Big(1 + \frac{10}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \frac{10^4}{4!}\Big).$$

8. *Έχουμε μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να απαιτηθεί άρτιος αριθμός αποτυχιών μέχρι την N επιτυχία.*
Η πιθανότητα να έχουμε n αποτυχίες μέχρι την N επιτυχία είναι

$$\binom{n+N-1}{n} p^N (1-p)^n.$$

Πράγματι, μέχρι και την N επιτυχία θα έχουν γίνει συνολικά $n + N$ δοκιμές. Η τελευταία δοκιμή είναι επιτυχημένη με πιθανότητα p και από τις υπόλοιπες $n + N - 1$ δοκιμές θα έχουμε n αποτυχημένες με πιθανότητα $1 - p$ για την καθεμία και $N - 1$ επιτυχημένες με πιθανότητα p για την καθεμία.
Άρα η πιθανότητα να έχουμε άρτιο αριθμό αποτυχιών μέχρι την N επιτυχία είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων που βρήκαμε για $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$ ή, ισοδύναμα, για $n = 2k$, όπου $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Άρα η πιθανότητα που ζητάμε είναι

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k+N-1}{2k} p^N (1-p)^{2k}\\ &\quad = \frac{p^N}{(N-1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+N-1)(2k+N-2)\cdots(2k+1)(1-p)^{2k}.\end{aligned} \tag{1}$$

Θεωρούμε την δυναμοσειρά

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+N-1)(2k+N-2)\cdots(2k+1)x^{2k}.$$

Παρατηρούμε ότι ο k όρος της είναι η $N - 1$ παράγωγος του x^{2k+N-1}. Άρα $g(x) = f^{(N-1)}(x)$, όπου

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k+N-1} = x^{N-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(x^2)^k = \frac{x^{N-1}}{1-x^2}.$$

Για να βρούμε την $N - 1$ παράγωγο της $f(x)$ γράφουμε

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$$

οπότε

$$f(x)=\frac{x^{N-1}}{2(1-x)}+\frac{x^{N-1}}{2(1+x)}=\frac{x^{N-1}}{2(1-x)}+(-1)^{N-1}\frac{(-x)^{N-1}}{2(1-(-x))}. \tag{2}$$

Τώρα έχουμε

$$\frac{x^{N-1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^{N-1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}-1-x-x^2-\cdots-x^{N-2}$$

οπότε η $N-1$ παράγωγος του $\frac{x^{N-1}}{1-x}$ είναι

$$\Big(\frac{x^{N-1}}{1-x}\Big)^{(N-1)}=\Big(\frac{1}{1-x}\Big)^{(N-1)}=\frac{(N-1)!}{(1-x)^N}.$$

Ομοίως,

$$\frac{(-x)^{N-1}}{1-(-x)}=\frac{1}{1-(-x)}-\frac{1-(-x)^{N-1}}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x}-1-(-x)-(-x)^2-\cdots-(-x)^{N-2}$$

οπότε η $N-1$ παράγωγος του $\frac{(-x)^{N-1}}{1-(-x)}$ είναι

$$\Big(\frac{(-x)^{N-1}}{1-(-x)}\Big)^{(N-1)}=\Big(\frac{1}{1+x}\Big)^{(N-1)}=(-1)^{N-1}\frac{(N-1)!}{(1+x)^N}.$$

Άρα από την (2) έχουμε

$$g(x)=f^{(N-1)}(x)=\frac{(N-1)!}{2(1-x)^N}+\frac{(N-1)!}{2(1+x)^N}.$$

Θέτοντας $x=1-p$, από την (1) βρίσκουμε την πιθανότητα που θέλουμε:

$$\frac{p^N}{2(1-(1-p))^N}+\frac{p^N}{2(1+(1-p))^N}=\frac{1}{2}+\frac{p^N}{2(2-p)^N}.$$

9. *Αν X είναι δ.τ.μ. και με ακέραιες πιθανές τιμές, δηλαδή $P(X\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})=0$, αποδείξτε ότι $\mathbb{E}(X)=-\sum_{n=1}^{+\infty}F_X(-n)+\sum_{n=0}^{+\infty}(1-F_X(n))$.*
Είναι

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(1-F_X(n))&=\sum_{n=0}^{+\infty}(1-P(X\le n))=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X>n)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X\ge n+1)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty}P(X=k)\Big)=\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{k-1}P(X=k)\Big)\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{k-1}1\Big)P(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}kf_X(k).\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned}-\sum_{n=1}^{+\infty}F_X(-n))&=-\sum_{n=1}^{+\infty}P(X\le -n))=-\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=n}^{+\infty}P(X=-k)\Big)\\&=-\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{k}P(X=-k)\Big)=-\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{k}1\Big)P(X=-k)\\&=-\sum_{k=1}^{+\infty}kP(X=-k)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-k)f_X(-k).\end{aligned}$$

Προσθέτουμε τις δύο ισότητες που βρήκαμε και έχουμε

$$\begin{aligned}
-\sum_{n=1}^{+\infty} F_X(-n) + \sum_{n=0}^{+\infty}(1 - F_X(n)) &= \sum_{k=1}^{+\infty}(-k) f_X(-k) + \sum_{k=1}^{+\infty} k f_X(k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}(-k) f_X(-k) + 0 f_X(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} k f_X(k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} k f_X(k) = \mathbb{E}(X).
\end{aligned}$$